

ALN

PRÁCTICA 0

2^{DO} CUATRIMESTRE 2008

Ejercicio 1. Verifique las siguientes identidades de normas matriciales

(1) Si $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$ y si $A = A^t$, $\|A\|_2 = \rho(A)$.

(2) Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{ \|A(:, j)\|_1 \}$, $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \|A(i, :)\|_1 \}$.

Ejercicio 2. Para las normas p y toda $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ verifique (o de un contraejemplo),

$$\sup_{\|x\|_p=1, x \in \mathbb{C}^m} \|Ax\|_p = \sup_{\|x\|_p=1, x \in \mathbb{R}^m} \|Ax\|_p.$$

Ejercicio 3. En $\mathbb{C}^{m \times m}$ dos normas cualesquiera $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|_*$ son equivalentes, i.e. existen $0 < c, C \in \mathbb{R}$ tales que $c\|M\|' \leq \|M\|_* \leq C\|M\|'$, para toda $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ (Las constantes dependen de m ?).

Ejercicio 4. Si $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$, A no singular y $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{C}^m , se tiene que $\|x\|' = \|Mx\|$ es una norma.

Ejercicio 5. Considere una matriz de Jordan $J \in \mathbb{C}^{m \times m}$, o sea, compuesta por bloques $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$, $l_i \leq m$ de la forma

$$J_i = \lambda_i * eye(l_i); \quad \text{o} \quad J_i = \lambda_i * eye(l_i) + diag(ones(1 : l_i - 1), 1);$$

verifique que $\|J\|_2 = \max_i \{ \|J_i\|_2 \}$.

Ejercicio 6. Si $J = J(\lambda, n)$ es un bloque de Jordan de tamaño $n \times n$ entonces para todo $k \geq r$ se tiene

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2} \lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. * Pruebe que con cualquier norma $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$. (Sug. basta verlo para la norma 2, estudie la norma 2 de las potencias de los bloques de Jordan. Esta demostración es alternativa a la dada en el apunte de cálculo numérico).