2^{do} cuatrimestre 2004

Análisis Armónico
Práctica 1

1. (a) Mostrar que la función

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

está en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Construir una función en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ soportada en la bola unitaria.

(c) Igual que (b) pero en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. (a) Probar que $\operatorname{sop}(f * g) \subset \operatorname{sop}(f) + \operatorname{sop}(g)$.

(b) Sean G_1, G_2 abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que G_1 es acotado y $\overline{G_1} \subset G_2$. Construir $h \in \mathcal{C}_0^\infty$ tal que $h \equiv 1$ en G_1 y $h \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus G_2$.

3. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y k una función acotada y uniformemente continua. Probar que $f * k_\varepsilon$ es acotada y uniformemente continua.

4. Probar que si

$$F(x, w) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 wx}{wx}$$

con $w > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{w \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int f(x - t) \frac{\sin^2 wt}{wt^2} dt = f(x)$$

en cada punto de continuidad de $f \in L^1(\mathbb{R})$.