2^{do} cuatrimestre 2004

Análisis Armónico
Práctica 10

1. (a) Hallar la descomposición de Calderón-Zygmund de $\chi_{[0,1]}$ a altura $\frac{1}{2^m}$, $m \geq 1$.

   (b) igual que (a) para $\frac{1}{x^2}\chi_{\{|x|>1\}}$ a altura $\frac{1}{4^m}$, $m > 1$.

2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \geq 0$, $f = g + b$ la descomposición de C-Z a altura $\lambda > 0$. Probar que

   (a) $\|g\|_p^p \leq (2^d\lambda)^{p-1}\|f\|_1$, $1 \leq p < \infty$.

   (b) $\|b\|_1 \leq 2\|f\|_1$.

   (c) $\frac{1}{|\mathcal{Q}_j|}\int_{\mathcal{Q}_j} |b| \leq \frac{2}{|\mathcal{Q}_j|}\int_{\mathcal{Q}_j} f$.

3. Supongamos que $k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisface

   (a) $|k(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^d}$

   (b) $|\nabla_x k(x,y)| + |\nabla_y k(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^{d+1}}$

   (c) si $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y)f(y)dy$ entonces T es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

   Probar que para $1 < p < +\infty$, T está acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ y $|\{|Tf| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_1$.