Análisis Armónico
Práctica 12

1. Probar el teorema de Weiner siguiente:

   Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y T_t el operador traslación en $t \in \mathbb{R}$ ($T_t f(x) = f(x-t)$). Entonces las combinaciones lineales finitas del conjunto $\{T_t f\}_{t\in\mathbb{R}}$ son densas en $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si $\widehat{f} \neq 0$ a. e.

2. (a) Supongamos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ satisface que existen $A, B > 0$ tales que

   $$A \sum_{|k|\leq N} |c_k|^2 \leq \Big\| \sum_{|k|\leq N} c_k \varphi(x-k) \Big\|_2^2 \leq B \sum_{|k|\leq N} |c_k|^2$$

   para cada $N \geq 0$ y para cada elección de escalares $c_{-N}, \ldots, c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$.
   Probar que $A \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w+k)|^2 \leq B$ a. e. w.

   (b) Si $\mathbb{V}$ es la clausura del subespacio gen$\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, hallar una función $\varphi_0 \in \mathbb{V}$ tal que $\{T_k\varphi_0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sea una base ortonormal de $\mathbb{V}$.
   (Sugerencia: usar que,
   $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sist. ortonormal si, y sólo si, $\sum |\widehat{\varphi}(w+k)|^2 = 1$ a. e.)

Entregar a Cristina o Lisi la próxima semana.