2^{do} *cuatrimestre 2004*

Análisis armónico
Práctica 2

1. Para cualquier $a > 0$ muestre que

$$T_a\varphi = \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx + \int_{a}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx + \int_{-a}^{a} \frac{(\varphi(x) - \varphi(0))}{|x|}dx$$

   es una distribución. ($\varphi \in D(\mathbb{R})$).

2. Muestre que si T_a está definida como en 1) entonces

$$T_a\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx \quad \forall \quad \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad \text{con} \quad \varphi(0) = 0.$$

3. Defina L_a igual que T_a en 1) pero reemplazando $|x|$ por x. Muestre que L_a es una distribución que no depende de a y que vale

$$L_a\varphi = \lim_{a \to 0^+} \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{a}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

4. Sea $f_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 < \varepsilon < 1$ y

   (a) $\text{Sop}(f_\varepsilon) \subset \{||x|| \leq \varepsilon\}$,
   (b) $\int f_\varepsilon = 1$,
   (c) $\int |f_\varepsilon| \leq c < +\infty$.

   Muestre que:

   i. $T_{f_\varepsilon} \to \delta$ en $D'(\mathbb{R})$ para $\varepsilon \to 0$.
   ii. Si f_ε satisface $a)$ y $T_{f_\varepsilon} \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \delta$ en $D'(\mathbb{R}^n)$ entonces vale $b)$.