2^{do} cuatrimestre 2004

Análisis Armónico
Práctica 3

1. Sean f la función escalera de Cantor en $[0,1]$ y μ la medida de Cantor en $[0,1]$ (i.e., si I es un intervalo de Cantor del paso k, $|I| = \frac{1}{3^k}, \mu(I) = \frac{1}{2^k}$). Probar que $D(T_f) = T_\mu$. Comparar con $T_{f'}$.

2. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado y f continua a izquierda y de variación acotada. Probar que $D(T_f) = T_\mu$, donde μ es la medida definida en I por $\mu([a,b)) = f(b) - f(a))$, $[a,b) \subset I$.

   (Sugerencia: integrar ϕ' en $\{(x,y) \in I \times I : x < y\}$ y usar Fubini).

   Concluir que $D(T_f) = T_{D(f)}$ si, y sólo si, f es absolutamente continua.

3. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que $g(y) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(y)$ existe y es continua, excepto en algún punto y_0 donde g se define arbitrariamente. Si $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ entonces

   (a) $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = T_g$, si $n \geq 2$.

   (b) Si f es continua en y_0 entonces (a) vale para $n = 1$.

4. (Zuberman) Sea $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $|T(\phi)| \leq c(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)$.

   (a) Probar que $T \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

   (b) ¿Qué puede afirmar sobre T si $|T(\phi)| \leq c||\phi||_p \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)$?

5. Sea $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Definimos $T(\phi) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \phi^{(n)}(\frac{1}{n})$.

   (a) Probar que $T \in D'(\Omega)$.

   (b) T no es la restricción de ninguna distribución de $D'(\mathbb{R})$ a Ω (i. e., no existe $\lambda \in D'(\mathbb{R})$ tal que $\lambda\phi = T(\phi) \;\; \forall \phi \in D(\Omega)$).

   (c) Igual con $T(\phi) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \phi(\frac{1}{n})$.