2^{do} cuatrimestre 2004

Análisis Armónico
Práctica 4

1. Muestre que:

   (a) la función $e^{-\pi|x|^2} \in S$ y que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = 1$.

   (b) la función $e^{-|x|^2} \cdot e^{ie^{|x|^2}}$ es de decrecimiento rápido en infinito, pero no sus derivadas.

   (c) las inclusiones $D \subset S \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{E}' \subset S' \subset D'$ son estrictas.
   (Pista: Dada $f(x) = e^{|x|^2}$ no existe $T \in S'$ tal que $T|_D = T_f$.)

2. (a) Sea f una distribución en $\mathbb{R}$ tal que $f' = 0$. Pruebe que $f = $ cte.
   (Sug. Toda $\varphi \in D$ puede ser escrita como $\varphi(x) = \psi'(x) + c\varphi_0(x)$ donde $\varphi_0 \in D$ fija y $\int \varphi_0 \neq 0$, $\psi \in D$, c una constante).

   (b) Si f es una distribución en $\mathbb{R}$ tal que $f^{(k)} = 0$ entonces f es un polinomio de grado menor que k.

   (c) Si f es una distribución en $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo $\frac{\partial}{\partial x_k} f = 0$, $k = 1, \ldots, n$ entonces f es constante.

3. (a) Si f es una distribución en $\mathbb{R}$ tal que $x \cdot f = 0$ entonces $f = c \cdot \delta$.

   (b) Si f es una distribución en $\mathbb{R}^n$ tal que $x_j \cdot f = 0$, $j = 1, \ldots, n$ entonces $f = c \cdot \delta$.