2^{do} cuatrimestre 2004

Análisis Armónico
Práctica 8

1. Sea $\{T_t\}$ una familia de operadores lineales en $L^p(X, \mu)$ y

$$T^*(f)(x) = \sup_t \{|T_t(f)(x)|\}.$$

Probar que si T^* es de tipo débil (p, q) entonces

$$\{f \in L^p(X, \mu) : \lim_{t \to t_0} T_t(f)(x) \text{ existe a. e.}\}$$

es cerrado en $L^p(X, \mu)$.

2. Probar que si $K \subset \mathbb{R}$ es compacto y $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos abiertos tal que $K \subset \cup_{\lambda \in \Lambda}$ entonces existe un subcubrimiento finito $I_1, \ldots, I_n$ con $\sum \chi_{I_j}(x) \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Probar la siguiente versión del lema de Calderón:

Sean $f \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha > 0$. Existen conjuntos disjuntos G y B en $\mathbb{R}^d$ tales que:

(a) para casi todo $x \in G$, $f(x) \leq \alpha$,

(b) $B = \cup_k Q_k$ donde Q_k son cubos con interiores disjuntos tales que

$$\alpha \leq \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f \leq 2^d \alpha,$$

(c) $\mathbb{R}^d = G \cup B$ y $|B| \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$.