Ejercicios adicionales dejados en clase

1. Probar Hausdorff-Young usando un teorema de interpolación.

2. Probar que para $x \in \mathbb{R}^n$, α un multiíndice, existe una constante $C_{n,\alpha}$ tal que
$$|x^\alpha| \leq C_{n,\alpha} |x|^{|\alpha|}$$

3. Probar que para $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_{n,k}$ tal que
$$|x|^k \leq C_{n,k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|$$

4. Probar la equivalencia entre las siguiente tres definiciones para la Clase de Schwartz en $\mathbb{R}^n$.

   a) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para todo par de multiíndices α, β existe una constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que
   $$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty$$

   b) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para todo par de multiíndices α, β existe una constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que
   $$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (x^\beta f(x))| = C_{\alpha,\beta} < \infty$$

   c) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo mutliíndice α existe una constante $C_{\alpha,N} > 0$ tal que
   $$|\partial^\alpha (f(x))| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{(1+|x|)^N}$$

5. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Existe una sucesión $\{g_k\} \subseteq C_0^\infty$ que cumple que para todo $1 \leq p < \infty$ tal que $f \in L^p$, vale $\|g_k - f\|_p \to 0$

6. Sea $g \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$ entonces $\lim_{|h| \to \infty} \|t_h(g) + g\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|g\|_p$

7. Sea $T : L^p \to L^q$. T es invariante por traslaciones si y sólo si el adjunto $T^* : L^{q'} \to L^{p'}$ es invariante por traslaciones.

8. Definimos $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Entonces $\widetilde{f * g} = \tilde{f} * \tilde{g}$

9. Sea $1 \leq p \leq q \leq 2$ y sean M_p los espacios de L^p-multiplicadores. Probar que
$$M_1 \subseteq M_p \subseteq M_q \subseteq M_2 = L^\infty$$

10. Sea H la transformada de Hilbert, $f = \chi_{[a,b]}$. Probar que $H(f) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}$

11. Probar los siguientes pasos intermedios usados para ver que si $w_0 \in \mathcal{S}'$ está dado por

$$(w_0, \varphi) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}$$

entonces $\widehat{w_0}(\xi) = -isgn(\xi)$

a) $\left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq 4$ para todo $0 < a < b < +\infty$

b) Si $a > 0$, definimos

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-ax} dx$$

- I es continua en cero
- $I(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(a)$

c) Deducir que $I(0) = \frac{\pi}{2}$ y que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x} dx = \pi sgn(b)$$