2^{do} cuatrimestre 2006

Análisis Armónico
Práctica 1

1. *a)* Mostrar que la función

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   está en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

   b) Construir una función en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ soportada en la bola unitaria.

   c) Igual que (b) pero en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. *a)* Probar que $\text{sop}(f * g) \subset \text{sop}(f) + \text{sop}(g)$ cuando alguna de las dos funciones es de soporte compacto. ¿Qué se puede decir si ninguna de las dos funciones es de soporte compacto?

   b) Sean G_1, G_2 abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que G_1 es acotado y $\overline{G_1} \subset G_2$. Construir $h \in \mathcal{C}_0^\infty$ tal que $h \equiv 1$ en G_1 y $h \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus G_2$.

3. Sea $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx = 1$. Se define, para $\varepsilon > 0$, $k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}k(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que

   a) $\int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x)dx = 1$ para todo $\varepsilon > 0$

   b) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\delta} k_\varepsilon(x)dx = 0$ para todo $\delta > 0$.

4. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y k una función acotada y uniformemente continua. Probar que $f * k_\varepsilon$ es acotada y uniformemente continua.

5. Sea $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx = 1$ y $k(x) = o(|x|^{-n})$ cuando $|x| \to \infty$. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{\varepsilon \to 0}(f * k_\varepsilon)(x) = f(x)$ en cada punto de continuidad de f.

6. *a)* Probar que si

$$F(x, w) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 wx}{wx^2}$$

   con $w > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{w \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int f(x - t)F(t, w)dt = f(x)$$

   en cada punto de continuidad de $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sugerencia: Ver ejercicio anterior.

b) Ídem a) para

$$P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2}$$

7. *a*) Probar que $P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2}$ satisface la ecuación de Laplace en el semiplano superior:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P(x,y) = 0 \qquad \text{si } y > 0$$

b) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, $y > 0$. Definimos $f(x,y) := (f * P(\cdot, y))(x)$. Probar que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P(x-t,y)dt$$

Sugerencia: Usar que $\partial^\alpha P \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ para cualquier multiíndice α.

c) Concluir que si f es continua e integrable en $\mathbb{R}$ entonces $f(x,y) = (f*P(\cdot,y))(x)$ es una solución del problema de Dirichlet para el semiplano superior:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{en } y > 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

(La condición de borde se entiende en el sentido: $\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x)$)