2^{do} cuatrimestre 2006

Análisis Armónico
Práctica 2

1. Sea $0 < p < 1$, $f, g \in L^p$. Probar que

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Sugerencias: Usar que $1+t^p \geq (1+t)^p$ si $t \geq 0$ para probar que $\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p+\|g\|_p^p$. Considerar luego la función $\phi(t) = (1 + t^{\frac{1}{p}})(1 + t)^{-\frac{1}{p}}$, que tiene un mínimo en $t = 1$.

2. *a*) Probar la siguiente desigualdad generalizada de Hölder: Sean $0 < p, p_1, .., p_k \leq +\infty$ con $k \geq 2$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + .. + \frac{1}{p_k}$. Dadas funciones $f_1, ...f_k$ tales que $f_j \in L^{p_j}(X, \mu)$ vale que

$$\|f_1...f_k\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}...\|f\|_{L^{p_k}}$$

b) Si $p_j < \infty$ para todo j y vale la igualdad en (a) entonces existen constantes $c_1, ..., c_k$, $c_j \geq 0$ tales que

$$c_1|f_1|^{p_1} = ... = c_k|f_k|^{p_k}$$

c) Sea $r < 0$ y $g > 0$ a.e. Si $\|g^{-1}\|_{L^{|r|}} < \infty$, se define

$$\|g\|_{L^r} := \|g^{-1}\|_{L^{|r|}}^{-1}$$

Sea $0 < q < 1$ y p tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar que si $f > 0$ y $g > 0$ en casi todo punto entonces

$$\|fg\|_1 \geq \|f\|_p\|g\|_q$$

3. Sea $f \in L^p(X, \mu)$ con $\mu(X) = 1$ para algún $p > 0$. Entonces

$$\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp\left(\int_X \log(|f(x)|)d\mu(x)\right)$$

con la interpretación: $e^{-\infty} = 0$.

Sugerencias:

a) Usar la desigualdad de Jensen para probar que $\log \|f\|_q \geq \int_X \log(|f|)d\mu$.

b) Probar que $\log \|f\|_q \leq \int_X (\frac{|f|^q-1}{q})d\mu$

c) Probar que $\lim_{q\to 0} \int_X (\frac{|f|^q-1}{q})d\mu = \int_X \log(|f|)d\mu$