2^{do} cuatrimestre 2006

Análisis Armónico
Práctica 3

1. Sea f definida sobre (X,μ) con valores en $\mathbb{C}$. La función "reordenada decreciente" se define por
$$f^*(t) = \text{ínf}\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$$
Probar que si f es μ-medible entonces

   a) f^* es continua a derecha en $[0, +\infty)$
   b) $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt \quad , \quad 0 < p < +\infty$
   c) $\|f\|_{L^\infty} = f^*(0)$
   d) $\sup_{t>0} t^s f^*(t) = \sup_{\alpha>0} d_f(\alpha)^s \alpha \quad , \quad 0 < s < +\infty$
   e) I) Si $g \geq 0$ medible simple en (X,μ) y $A \subset X$ es un conjunto medible, probar que
   $$\int_A g \, d\mu \leq \int_0^{\mu(A)} g^*(t) dt$$
   II) Si f, g son medibles en (X,μ) entonces
   $$\int_X |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt$$

2. Probar que las funciones simples no son densas en $L^p_w(\mathbb{R})$, $0 < p \leq +\infty$

3. Construir una sucesión f_n en $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^1_w(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ pero $\|f_n\|_{L^1_w} \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$

4. Extender el teorema de Marcinkiewicz al caso en que T es cuasilineal.