2^{do} *cuatrimestre 2006*

Análisis Armónico
Práctica 4

1. Sea $\{T_t\}$ una familia de operadores lineales en $L^p(X,\mu)$ y

$$T^*(f)(x) = \sup_t \{|T_t(f)(x)|\}.$$

Probar que si T^* es de tipo débil (p,q) entonces

$$\{f \in L^p(X,\mu) : \lim_{t\to t_0} T_t(f)(x) \text{ existe a. e.}\}$$

es cerrado en $L^p(X,\mu)$.

2. Sean $\tilde{M}_c$ y $\tilde{M}$ las maximales centrada y no centrada respectivamente usando cubos en vez de bolas. Probar que

$$\frac{2^n}{v_n\sqrt{n}^n} \leq \frac{Mf}{\tilde{M}f} \leq \frac{2^n}{v_n}$$

Lo mismo vale para $\frac{M_c f}{\tilde{M}_c f}$. Concluir que $\tilde{M}_c$ y $\tilde{M}$ son débiles $(1,1)$ y fuertes (p,p) para $1 < p \leq \infty$

3. *a*) Calcular $\tilde{M}_c f$ para $f(x) = \chi_{\mathcal{Q}}(x)$ donde $\mathcal{Q}$ es un cuadrado en el plano.
   b) Comparar $\{\tilde{M}_c\chi_{\mathcal{Q}} > \varepsilon\}$ con $\mathcal{Q}^\varepsilon = \{x : \operatorname{dist}(x,\mathcal{Q}) < \varepsilon\}$.
   c) Lo mismo que a) y b) para χ_E donde $E = \{x : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$.

4. Sea $\mathcal{R}_x$ la familia de rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados que contienen a x. Se define la función maximal

$$M_S f(x) := \sup_{R\in\mathcal{R}_x} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y)|dy$$

Probar que

   a) $M_S(L^p) \subseteq L^p$ para $1 < p < +\infty$
   b) M_S no es débil $(1,1)$