2^{do} cuatrimestre 2006

ANÁLISIS ARMÓNICO
Práctica 5

1. *a*) Para cualquier $a > 0$ muestre que
$$T_a\varphi = \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx + \int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx + \int_{-a}^{a} \frac{(\varphi(x) - \varphi(0))}{|x|}dx$$
es una distribución.

   b) Si $\varphi \in D(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$ entonces
$$T_a\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx$$

2. Defina L_a igual que T_a en 1) pero reemplazando $|x|$ por x. Muestre que L_a es una distribución que no depende de a y que vale
$$L_a\varphi = \lim_{a\to 0^+} \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

3. Sea $f_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 < \varepsilon < 1$ y

   i. $\text{Sop}(f_\varepsilon) \subset \{||x|| \leq \varepsilon\}$,
   ii. $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int f_\varepsilon = 1$,
   iii. $\int |f_\varepsilon| \leq c < +\infty$.

   Muestre que:

   a) $T_{f_\varepsilon} \to \delta$ en $D'(\mathbb{R})$ para $\varepsilon \to 0$.
   b) Si f_ε satisface *a*) y $T_{f_\varepsilon} \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \delta$ en $D'(\mathbb{R}^n)$ entonces vale *b*).

4. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado y f continua a izquierda y de variación acotada. Probar que $D(T_f) = T_\mu$, donde μ es la medida definida en I por $\mu([a, b)) = f(b) - f(a))$, $[a, b) \subset I$. (Sugerencia: integrar ϕ' en $\{(x, y) \in I \times I : x < y\}$ y usar Fubini).

   Concluir que $D(T_f) = T_{D(f)}$ si, y sólo si, f es absolutamente continua.

5. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que $g(y) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(y)$ existe y es continua, excepto en algún punto y_0 donde g se define arbitrariamente. Si $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ entonces

   a) $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = T_g$, si $n \geq 2$.
   b) Si f es continua en y_0 entonces (a) vale para $n = 1$.

6. *a*) Si f es una distribución en $\mathbb{R}$ tal que $x \cdot f = 0$ entonces $f = c \cdot \delta$.

   b) Si f es una distribución en $\mathbb{R}^n$ tal que $x_j \cdot f = 0$, $j = 1, \ldots, n$ entonces $f = c \cdot \delta$.