2^{do} cuatrimestre 2006

Análisis Armónico
Práctica 6

1. El lema de Riemann-Lebesgue no es válido en general para medidas en $\mathbb{T}$.

   a) Mostrar que δ_0 no satisface R-L.

   b) Si μ es la medida de Cantor, probar que

   $$\hat{\mu}(n) = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\frac{2\pi n}{3^k})$$

   en particular $\hat{\mu}(3^m) = \hat{\mu}(1)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ Concluir que no satisface R-L.

2. Probar que la desigualdad de Hausdorff-Young no es reversible. Es decir, si $1 \leq p < 2$, no existe ninguna constante $C > 0$ tal que

   $$\|\hat{f}\|_p \leq C\|f\|_{p'}$$

   Sugerencia: Considerar primero $n = 1$ y $f_\lambda(x) = \phi(x)e^{-\pi i\lambda x^2}$ con $\phi \in C_0^\infty$.

3. Sea Ω una función integrable sobre la esfera unidad tal que

   $$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0$$

   Se define la aplicación T

   $$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)dx$$

   para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donde $x' = \frac{x}{|x|}$. Probar que T define un distribución temperada en $\mathbb{R}^n$. ¿Qué es T en $n = 1$?

4. Sea H la transformada de Hilbert. Si $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ entonces

   $$Hf = xf$$

   Sugerencia: Usar (probar) que $\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$.