2^{do} *cuatrimestre 2006*

Análisis Armónico
Práctica 7

1. Probar que si $K \subset \mathbb{R}$ es compacto y $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos abiertos tal que $K \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}$ entonces existe un subcubrimiento finito $I_1, \ldots, I_n$ con $\sum \chi_{I_j}(x) \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Probar la siguiente versión del lema de Calderón: Sean $f \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha > 0$. Existen conjuntos disjuntos G y B en $\mathbb{R}^d$ tales que:

   a) para casi todo $x \in G$, $f(x) \leq \alpha$,

   b) $B = \cup_k Q_k$ donde Q_k son cubos con interiores disjuntos tales que
   $$\alpha \leq \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f \leq 2^d\alpha,$$

   c) $\mathbb{R}^d = G \cup B$ y $|B| \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$.

3. Sea $\mathcal{Q}_0 = \{[0,1)^d + k : k \in \mathbb{Z}^d\}$ la familia de cubos diádicos de orden 0. Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ un cubo arbitrario cuyo lado $\ell(\mathcal{Q})$ satisface $0 < \ell(\mathcal{Q}) \leq 1$.

   a) Probar que $\mathcal{Q}$ interseca no más de 2^d cubos de $\mathcal{Q}_0$.

   b) Si R es un cubo diádico en $\mathcal{Q}_0$ que interseca a $\mathcal{Q}$ (ver (a)), probar que para cualquier cubo diádico $\mathcal{Q}'$ que contiene a R, $2\mathcal{Q}'$ contiene al centro de Q. (Aquí $2\mathcal{Q}'$ es el cubo con el mismo centro que $\mathcal{Q}'$ y el doble de lado).

4. *a*) Hallar la descomposición de Calderón-Zygmund de la función $\chi_{[0,1]}$ a altura $\frac{1}{2^m}$, $m \geq 1$.

   b) igual que (a) para $\frac{1}{x^2}\chi_{\{|x|>1\}}$ a altura $\frac{1}{4^m}$, $m > 1$.

5. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \geq 0$, $f = g + b$ la descomposición de C-Z a altura $\lambda > 0$. Probar que

   a) $\|g\|_p^p \leq (2^d\lambda)^{p-1}\|f\|_1$, $1 \leq p < \infty$.

   b) $\|b_1\| \leq 2\|f\|_1$.

   c) $\frac{1}{|\mathcal{Q}_j|}\int_{\mathcal{Q}_j}|b| \leq \frac{2}{|\mathcal{Q}_j|}\int_{\mathcal{Q}_j} f$.

6. Supongamos que $k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisface

   a) $|k(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^d}$

   b) $|\nabla_x k(x,y)| + |\nabla_y k(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^{d+1}}$

   c) si $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y)f(y)dy$ entonces T es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

   Probar que para $1 < p < +\infty$, T está acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ y $|\{|Tf| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_1$.