Categorías de Modelos (2006)
Práctica Uno
Cálculo de fracciones

1. Sea R un anillo con unidad (no necesariamente conmutativo) y sea S un subconjunto multiplicativo de R. Pensando a R como una categoría aditiva con un solo objeto y aplicando para este caso particular el cálculo de fracciones (a izquierda), enunciar las condiciones necesarias sobre S para que exista la localización $S^{-1}R$ y caracterizarla.

2. Sea Σ una clase multiplicativa a izquierda en una categoría C (i.e. Σ admite cálculo de fracciones a izquierda y es localmente pequeña) y sea $q : C \to \Sigma^{-1}C$ la localización. Probar que
   a) Si X es objeto inicial (resp. final, objeto cero) en C entonces $q(X)$ es inicial (resp. final, cero) en $\Sigma^{-1}C$.
   b) Si el producto $X \times Y$ existe en C, entonces $q(X \times Y) \simeq q(X) \times q(Y)$ en $\Sigma^{-1}C$.
   c) Supongamos que C tiene cero. Entonces $q(X) = 0$ en $\Sigma^{-1}C$ si y sólo si Σ contiene a la flecha cero $0 : X \to X$.
   d) Si C es aditiva, entonces también lo es $\Sigma^{-1}C$ y q resulta un funtor aditivo.

3. Sea X un espacio topológico. Probar que existe un espacio Hausdorff $H(X)$ y una función continua (cociente) $q : X \to H(X)$ (que llamaremos la Hausdorffización de X) que cumple la siguiente propiedad universal: para todo espacio Hausdorff Y y toda función continua $f : X \to Y$, existe una única función continua $\tilde{f} : H(X) \to Y$ tal que $\tilde{f}q = f$. Concluir que la inclusión $i : Haus \to Top$ de la categoría de espacios Hausdorff en la categoría de espacios topológicos admite una adjunto a izquierda.

4. Probar que los límites (pequeños) en $Haus$ existen y coinciden con los de Top. Probar que los colímites en $Haus$ coinciden con la Hausdorffización del colímite en Top.

5. Sea B una subcategoría plena de C y sea Σ una clase multiplicativa a izquierda de C cuya restricción a B sigue siendo multiplicativa. Por abuso de notación notaremos $\Sigma^{-1}B$ a $(\Sigma \cap B)^{-1}B$. Probar que son equivalentes:
   a) El funtor natural $\Sigma^{-1}B \to \Sigma^{-1}C$ es plenamente fiel..
   b) Si $c \to b$ es morfismo de Σ con $b \in B$, existe un morfismo $b' \to c$ en C tal que la composición $b' \to b$ está en Σ.
   c) Si $b \to c$ es morfismo de Σ con $b \in B$, existe un morfismo $c \to b'$ en C tal que la composición $b \to b'$ está en Σ.

   A una subcategoría B que cumpla estas condiciones se la llama una *subcategoría localizante para* Σ.

6. Sea C una categoría, Σ una clase multiplicativa a izquierda y B una subcategoría localizante para Σ. Si para todo objeto c de C existe un morfismo $c \to b$ en Σ con b en B, entonces $\Sigma^{-1}B \simeq \Sigma^{-1}C$.

7. Sea S un sistema multiplicativo de un anillo R (que cumple cálculo de fracciones a izquierda). Sea Σ la clase de todos los morfismos $A \to B$ en la categoría de R-módulos tales que $S^{-1}A \to S^{-1}B$ es un isomorfismo. Probar que Σ es una clase multiplicativa en R-mod y que $S^{-1}R$-mod es una subcategoría localizante. Más aún, probar que

$$(S^{-1}R) - mod \simeq \Sigma^{-1}(R - mod)$$

8. Sea C una categoría abeliana. Una subcategoría abeliana B se llama *Subcategoría de Serre* si es cerrada por subobjetos, cocientes y extensiones. Supongamos que B sea de Serre y sea Σ la familia de todos los morfismos f de C tales que $ker(f)$ y $coker(f)$ estén en B.
   a) Probar que Σ admite cálculo de fracciones. Denotaremos C/B a $\Sigma^{-1}C$.
   b) Probar que $q(X) = 0$ en C/B si y sólo si X está en B.
   c) Probar que C/B es abeliana y q es funtor aditivo.