Categorías de Modelos (2006)

Práctica Dos

Algunos ejercicios relacionados con categorías derivadas,
objetos simpliciales y fibraciones de Kan.

1. Sea $f : B \to C$ un morfismo de complejos de una categoría abeliana $\mathcal{A}$ y sea Z_f el cilindro de f. Probar que la inclusión de C en el cilindro (definida por $i(c) = (0, 0, c)$ es un retracto por deformación. Más precisamente, probar que $q : Z_f \to C$ definido por $q(b, b', c) = f(b) + c$ cumple $qi = 1, iq \simeq 1$.

2. Se define el cilindro de un complejo B como $I(B) = Z_{1_B}$. Se definen $i_0, i_1 : B \to I(B)$ como $i_0(b) = (b, 0, 0), i_1(b) = (0, 0, b)$.
   a) Dados $f, g : B \to C$, probar que son homotópicas si y sólo si existe $H : I(B) \to C$ tal que $Hi_0 = f,\ Hi_1 = g$.
   b) Probar que i_0, i_1 son equivalencias homotópicas con la misma inversa q.

3. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Denotamos con $Kom(\mathcal{A})$ la categoría de complejos de cadenas de $\mathcal{A}$, con $K(\mathcal{A})$ la categoría homotópica de $Kom(\mathcal{A})$ y con $D(\mathcal{A})$ la categoría derivada.
   Probar que, si $f = 0$ en $Kom(\mathcal{A})$ entonces $f = 0$ en $K(\mathcal{A})$ y que si $f = 0$ en $K(\mathcal{A})$ entonces es cero en $D(\mathcal{A})$. Mostrar también con ejemplos que ambas implicaciones son estrictas.

4. Decimos que un complejo de cadenas C_* en $Kom(\mathcal{A})$ (o en $K(\mathcal{A})$ o en $D(\mathcal{A})$) es un H_0-complejo si su homología está concentrada en grado 0. Probar que el funtor $q : \mathcal{A} \to D(\mathcal{A})$ que manda cada objeto de $\mathcal{A}$ en el complejo concentrado en grado 0, induce una equivalencia de categorías entre $\mathcal{A}$ y la subcategoría plena de $D(\mathcal{A})$ formada por los H_0-complejos.

5. Sea $i : \Delta \to \mathbf{Cat}$ la inclusión que identifica un conjunto ordenado con la categoría que tiene exactamente un morfismo $i \to j$ si $i \leq j$. De esta manera podemos definir el nervio de una categoría $\mathcal{C}$ como el conjunto simplicial
   $$(N\mathcal{C})_n = \mathbf{Cat}(i([n]), \mathcal{C}).$$
   Probar que $N\mathcal{C}$ es Kan si y sólo si $\mathcal{C}$ es un grupoide.

6. Sea G un grupo. Pensando a G como un grupoide de un solo objeto, podemos definir el conjunto simplicial NG (nervio de G). Probar que NG es un grupo simplicial si y sólo si G es abeliano. Observar que de todas formas NG es Kan por el ejercicio anterior.

7. Probar que $\Delta[n]$ no es Kan.

8. Sea $Sing : \mathbf{Top} \to \mathbf{SSet}$ el funtor singular. Probar que $p : E \to B$ es fibración de Serre si y sólo si $Sing(p) : Sing(E) \to Sing(B)$ es fibración de Kan. Deducir que $Sing(X)$ es Kan para todo espacio X.

9. Sea $p : X \to Y$ un morfismo de grupos simpliciales que es epi en cada grado. Probar que p es una fibración de Kan (entre los conjuntos simpliciales subyacentes). Deducir que todo grupo simplicial es Kan (visto como conjunto simplicial).