

**Categorías de Modelos (2006)**  
 Práctica Cuatro  
 Categorías de Modelos Cerradas - Parte II

1. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos y sean  $A \in \mathcal{C}_c$ ,  $B \in \mathcal{C}_f$ . Probar que  $\Pi_1^A(B)$  es un grupoide (con la definición de composición e inversa dadas en clase).
2. Sean  $i : A' \rightarrow A$  en  $\pi\mathcal{C}_c$  y  $j : B \rightarrow B'$  en  $\pi\mathcal{C}_f$ . Probar que se tienen funtores bien definidos  $i^* : \Pi_1^A(B) \rightarrow \Pi_1^{A'}(B)$  y  $j_* : \Pi_1^A(B) \rightarrow \Pi_1^A(B')$ . Probar además que  $i^*j_* = j_*i^*$ .
3. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos punteadas con objeto nulo  $*$ . Caracterizar los grupoides  $\Pi_1^A(*)$  y  $\Pi_1^*(B)$ .
4. Sea  $n \geq 2$ . Probar que  $\Sigma^n A$  es un cogrupo abeliano y  $\Omega^n B$  es un grupo abeliano en  $\mathcal{H}o \mathcal{C}$ .
5. Completar la demostración del siguiente teorema (que en parte se demuestra en clase):  
 Sea  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  con  $F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$  una sucesión de la fibra en  $\mathcal{H}o \mathcal{C}$ . Sea  $\partial : \Omega B \rightarrow F$  el morfismo inducido y sea  $A$  un objeto de  $\mathcal{H}o \mathcal{C}$ . Probar que la siguiente sucesión larga es exacta:  

$$\dots \rightarrow [A, \Omega^{q+1} B] \rightarrow [A, \Omega^q F] \rightarrow [A, \Omega^q E] \rightarrow \dots \rightarrow [A, \Omega E] \rightarrow [A, \Omega B] \rightarrow [A, F] \rightarrow [A, E] \rightarrow [A, B]$$
6. Enunciar y demostrar el resultado dual al ejercicio anterior (es decir, con la sucesión larga de la cofibra).
7. Probar que todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{H}o \mathcal{C}$  puede ser extendido a una sucesión de la fibra  $F \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ ,  $F \times \Omega B \rightarrow F$ .
8. Enunciar y probar el resultado dual al ejercicio anterior.
9. Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  categorías de modelos punteadas con funtores suspensión  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  definidos respectivamente en  $\mathcal{H}o \mathcal{C}$  y  $\mathcal{H}o \mathcal{C}'$ . Sea  $(F, U) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  una adjunción de Quillen y sea  $(LF, LU) : \mathcal{H}o \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}o \mathcal{C}'$  la adjunción derivada inducida. Probar que
  - a) Se tiene un isomorfismo canónico  $LF\Sigma \simeq \Sigma'LF$ .
  - b)  $LF$  preserva sucesiones de la cofibra.