Categorías de Modelos (2006)

Práctica Cinco

$\mathcal{S}$ -categorías

Notaremos con $\mathcal{S}$ la categoría de conjuntos simpliciales.

1. Probar que las siguientes son $\mathcal{S}$ -categorías:

a) $\mathcal{T}op$ con $\underline{\mathcal{T}op}(X, Y)_n = \mathcal{T}op(X \times \Delta^n, Y)$.

b) $\mathcal{S}$ con $\underline{\mathcal{S}}(X, Y)_n = \mathcal{S}(X \times \Delta[n], Y)$.

c) $\mathcal{C}at$ con $\underline{\mathcal{C}at}(A, B)_n = \mathcal{C}at(A \times \Delta[n], B)$.

2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $S(\mathcal{C})$ la categoría de objetos simpliciales en $\mathcal{C}$. Probar que $S(\mathcal{C})$ es una $\mathcal{S}$ -categoría.

3. sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{S}$ -categoría y sea X un objeto de $\mathcal{C}$. Probar que el funtor

$$\underline{Hom}(X, _): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$$

es un $\mathcal{S}$ -funtor.

4. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{S}$ -categoría. Considerar la categoría $\underline{F}$ de $\mathcal{S}$ -funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{S}$. Probar que esta categoría es una $\mathcal{S}$ -categoría.

5. Probar el Lema de Yoneda Simplicial: Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{S}$ -categoría, X un objeto de $\mathcal{C}$ y $h^X = \underline{Hom}(X, _): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ el $\mathcal{S}$ -funtor representable. Probar que para todo $\mathcal{S}$ -funtor $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$, se tiene un isomorfismo natural

$$\underline{Hom}_{\underline{F}}(h^X, f) \simeq f(X)$$

donde $\underline{F}$ es la categoría del ejercicio anterior.

6. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{S}$ -categoría, X objeto de $\mathcal{C}$ y K un conjunto simplicial. Probar que el tensor $X \otimes K$ representa al $\mathcal{S}$ -funtor representable

$$\underline{Hom}(K, \underline{Hom}(X, _)): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$$

7. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{S}$ -categoría, X objeto de $\mathcal{C}$ y sean K, L un conjuntos simpliciales. Probar que existe un isomorfismo canónico

$$(X^K)^L \simeq X^{K \times L}$$