

Categorías de Modelos (2006)

Práctica Seis

Grupos Simpliciales y Objetos Simpliciales en Categorías Abelianas

Notación: Notaremos con $\mathcal{A}$ a una categoría abeliana y con $s\mathcal{A}$ a la categoría de objetos simpliciales de $\mathcal{A}$. Notaremos con $s\mathbf{Gr}$ a la categoría de grupos simpliciales.

1. Sea A un objeto simplicial en una categoría abeliana y sea NA el complejo normalizado. Probar que NA es isomorfo al complejo normalizado dual $(\tilde{N}A, \delta)$ donde

$$(\tilde{N}A)_n = \{x \in A_n, d_i x = 0 \ \forall i \neq n\}$$

$$\text{y } \delta = (-1)^n d_n.$$

2. Sea $A \in s\mathcal{A}$, sea $C(A)$ el complejo no normalizado y $D(A)$ el complejo degenerado. Probar que $C(A) = NA \oplus D(A)$ y por lo tanto NA es isomorfo a $C(A)/D(A)$.
3. Sea X un complejo de Kan y sea $\mathbb{Z}[X]$ el grupo simplicial abeliano generado por X . Sea $h : X \rightarrow \mathbb{Z}[X]$ el morfismo simplicial que manda cada elemento de X al elemento de la base en $\mathbb{Z}[X]$. Considerar el morfismo inducido:

$$\pi_*(X) \rightarrow \pi_*(\mathbb{Z}[X]) \simeq H_*(N\mathbb{Z}[X]) \simeq H_*(C(\mathbb{Z}[X])) = H_*(X, \mathbb{Z})$$

Identificando los grupos de homotopía de un espacio con los grupos de homotopía de su conjunto singular, mostrar que este morfismo es el morfismo de Hurewicz usual.

4. Sea A un grupo abeliano simplicial. Probar que el morfismo de Hurewicz $h_* : \pi_*(A) \rightarrow H_*(A, \mathbb{Z})$ es una sección.
5. Sean $f, g : A \rightarrow B$ en $s\mathcal{A}$ o en $s\mathbf{Gr}$. Probar que $f \simeq g$ si y sólo si $f - g \simeq 0$.
6. Sean $f, g : A \rightarrow B$ en $s\mathcal{A}$. Probar que si $f \simeq g$, entonces $Nf \simeq Ng$ (como morfismos entre los complejos normalizados).
7. Recordemos la construcción del objeto de caminos PX de un objeto simplicial X (en una categoría cualquiera): $(PX)_n = X_{n+1}$ y $d_i^{PX} = d_i^{n+1}$ de X . Probar que $d_n : PX \rightarrow X$ es simplicial y que PX es equivalente homotópico al objeto constante $K(X_0)$ (que tiene el objeto X_0 en cada grado con caras y degeneraciones iguales a la identidad).
8. Decimos que un grupo G actúa en un conjunto simplicial X si se tiene una acción para cada X_n que conmuta con las caras y degeneraciones. Si consideramos las órbitas de las acciones X_n/G se tiene un conjunto simplicial X/G . Cuando las acciones de G en todos los X_n son libres (es decir $gx \neq x$ si $g \neq 1$), decimos que el morfismo $X \rightarrow X/G$ es una G -fibración principal. Probar que las G -fibraciones principales son fibraciones de Kan.
9. Sea G un grupo. Notaremos con BG a su espacio clasificante, es decir al nervio de G (visto como categoría con un solo objeto). Notaremos con EG al espacio de caminos $P(BG)$. Notar que EG es contráctil. Probar que el morfismo $d_n : EG \rightarrow BG$ es una G -fibración principal y por lo tanto es una fibración de Kan. Usando la sucesión larga de los grupos de homotopía de una fibración, calcular los grupos de homotopía de BG .