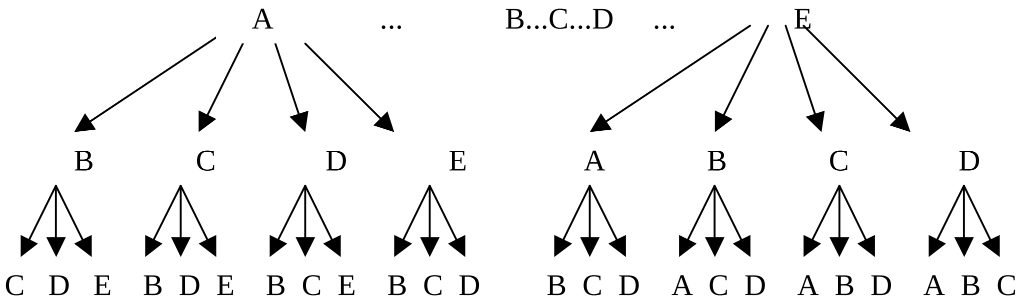
ENUMERACIÓN

1 - Introducción

Permutaciones

Un alumno debe elegir tres materias del conjunto de materias {A,B,C,D,E} y luego cursarlas en secuencia. De cuantas maneras puede hacerlo? El siguiente "árbol" sugiere como enumerar las maneras posibles:



La primera materia puede ser cualquiera de las 5, p.ej.:A. Habiendo elegido la primera, la segunda puede ser una de las 4 restantes, p.ej. D. La tercera se puede elegir entre las 3 restantes por ej. E. Queda entonces claro que el total de posibles maneras de elegir 3 materias de las 5 y ordenarlas es 5.4.3

El problema es equivalente a preguntarse cuantas *funciones inyectivas* $f:\{1,2,3\}\to\{A,B,C,D,E\}$ hay? En efecto una tal función significa asignar una primera letra, luego asignar una segunda letra distinta a la primera, etc.

Tambien podemos dar al problema la siguiente interpretación. Tenemos 3 bolillas numeradas 1,2,3 y tenemos 5 cajas llamadas A,B,C,D,E. Cuantas maneras distintas hay de distribuir las bolillas en las cajas con la restricción de que haya a lo sumo una bolilla por caja. Nuevamente, tenemos que decidir en que caja poner la bolilla 1, luego elegir una caja distinta para la bolilla 2, etc

En general, el problema es que se tiene un conjunto de n elementos (las 5 materias) y se elije un subconjunto de k elementos (3 materias) y luego los elementos se ordenan. Vemos que el total de maneras está dado por $n(n+1)(n+2)...(n+k-1)$. Nos referiremos a este problema como el de formar *permutaciones de tamaño k* de un conjunto con n elementos.Usaremos la notación.

$(n)_k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$

De especial importancia es el caso en que n=k, es decir, dado un conjunto de n elementos de cuantas maneras se puede ordenarlos. Hablamos entonces de *permutaciones de n elementos*. Su total es

$(n)_n= n!$

Asi, por ejemplo, las letras ABCDE se pueden permutar de 5!=120 maneras distintas.

Combinaciones

Supongamos que el alumno del ejemplo de arriba debe elegir 3 entre 5 materias pero sin importar el orden en que las va a cursar. Cuantas maneras hay?

Llamemos al número buscado $\binom{5}{3}$. Supongamos que conocieramos este número, entonces podríamos resolver el problema anterior de la siguiente manera. Primero elegimos 3 de las 5 sin importar el orden, esto se puede hacer de $\binom{5}{3}$ maneras (por definición). Luego hallamos todas las permutaciones de las materias elegidas, esto se puede hacer de 3! maneras. Por lo tanto, el numero total de maneras es la composicion de elegir y luego permutar que es el producto $\binom{5}{3}$3!. Pero este numero ya fue calculado y es $(5)_3$. Por lo tanto, el número buscado es $\binom{5}{3} = (5)_3 / 3!$

El problema general de este tipo es el siguiente. Se tiene un conjunto X con n elementos y nos preguntamos cuantos subconjuntos de k elementos hay. Tambien nos referimos a estos subconjuntos como *combinaciones de tamaño k* del conjunto X. Este número aparece con gran frecuencia y se lo llama número combinatorio y lo definimos por

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Observemos que $(n)_k \cdot (n-k)! = n!$ por lo cual tambien tenemos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Señalemos dos identidades del numero combinatorio.

1) Establezcamos una correspondencia entre cada subconjunto S de X que tenga k elementos y hagámosle corresponder el subconjunto X\S que tiene n-k elementos. Por lo tanto, el numero de subconjuntos con k elementos es igual numero de subconjuntos con n-k elementos:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (n=1,2,...;k=1,2,...)$$

2) El cálculo por definición del número $\binom{n}{k}$ es engorroso. Derivamos una relación que permite calcularlo por recurrencia. Observemos que los subconjuntos de tamaño de k de un conjunto $X=\{x_1,...,x_n\}$ se pueden dividir en

a) Aquellos que no contienen a x_1. Estos resultan de elegir los subconjuntos de tamaño k de $X\backslash\{x_1\}$ que totalizan $\binom{n-1}{k}$.

b) Aquellos que contienen a x_1. Estos resultan de elegir los subconjuntos de tamaño k-1 de $X\backslash\{x_1\}$ y agregarle x_1. Por lo tanto,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

El lector puede verificar algebraicamente ambas relaciones a partir de la definicion del número combinatorio.

<u>Permutaciones y combinaciones con repetición</u>

Consideremos todas las funciones $f:\{1,2,3\}\to\{A,B,C,D,E\}$. Cuantas hay?

Observamos que al argumento 1 podemos asignarle cualquiera de las 5 letras. Hecho esto, a 2 podemos asignarle cualquiera de las 5 letras, y finalmente a 3 podemos también asignarle cualquiera de las 5 letras. De esta manera, podemos construir 5^3 funciones.

Otra interpretación es la siguiente. Tenemos 3 bolillas numeradas 1,2,3 y tenemos 5 cajas llamadas A,B,C,D,E. De cuantas maneras distintas podemos distribuir las bolillas en las cajas? Elegimos una caja donde poner la primera bolilla, elegimos una caja donde poner la segunda bolilla y elegimos una caja donde poner la tercera bolilla. Así resultan 5^3=125 maneras distintas.
Imaginemos que listamos estas posibles distribuciones:
AAA
AAB
ABA
BAA
AAC
...
EEE

A los items de esta lista los llamamos *permutaciones con repetición* de tamaño 3 del conjunto {A,B,C,D,E}. En general, si tenemos un conjunto X de k elementos, el número de permutaciones con repetición de tamaño n es k^n.

Observemos que si pensamos que las letras representan números, desarrollando el producto $(A+B+C+D+E)^3$ obtenemos la lista de permutaciones arriba listadas. En este desarrollo nosotros ignorariamos el orden de la permutacion. Por ejemplo, en lugar de AAB, ABA y BAA escribiriamos 3AAB o 3 A^2B.
Esto situación se presenta también en el modelo de cajas y bolillas. Supongamos que distribuimos 3 bolillas *iguales* en 5 cajas A,B,C,D,E. Ahora en AAB no hay orden, significa que hay 2 bolillas en A y una en B

En general, consideremos las permutaciones con repeticion de tamaño n de un conjunto X con k elementos. Estas totalizan k^n. Consideremos iguales las permutaciones que solo difieren en el orden. Esta relación de equivalencia define lo que llamamos *combinaciones con repetición* de tamaño n. Cuantas hay?

Para calcular este número volvamos al ejemplo de 3 bolitas iguales para distribuir entre 5 cajas { A,B,C,D,E} . AAB significa que hemos puesto 2 bolitas en la caja A y una bolita en B (no interesa el orden). Cuantas posibles distribuciones hay? Para responder a esto apelamos a un subterfugio. Representemos AAB de la siguiente manera
| ö ö / ö / / / |
Acá hemos usado / para denotar la separación entre las cajas (los extremos no cuentan) y hemos usado ö para denotar las bolitas. Cada distribucion de bolitas se puede representar de esta manera y cualquier representacion de barras y bolitas define una distribucion. Cuantas representaciones hay? Se trata de decidir entre 7 posiciones (3 ö y 4 /) a cuales tres asignarle ö. La respuesta es

$\binom{5-1+3}{3}$.

En general, si tenemos un conjunto de n elementos, el numero de combinaciones con repeticion de tamaño k es $\binom{n+k-1}{k}$. Esto cuenta tambien el numero de manera de distribuir k bolitas iguales entre n cajas distintas.

Permutaciones de una dada combinacion

Consideremos el desarrollo de $(a+b+c)^5$ = aaaaa+...+$\left\{\begin{matrix} abbcc \\ ccabb \\ \ldots \end{matrix}\right\}$+... +ccccc. Cada término del desarrollo es una permutacion de tamaño 5 del conjunto {a,b,c}. Hay un total de 3^5 términos. Hemos reunido en una llave aquellos terminos de la forma ab^2c^2. Surge la pregunta: cuantas permutaciones surgen de esta combinación? Razonamos de la siguiente manera. Pongamos primero la letra *a* en una de las 5 posiciones. A continuación las dos *b*'s pueden ser colocadas en cualquiera de las 4 restantes posiciones de $\binom{4}{2}$maneras distintas. Finalmente queda una sola manera de ubicar las dos *c*'s. En total resulta$\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{5!}{1!2!2!}$

El problema general es el siguiente. Dada una sucesión de n objetos x_1, x_2, ...,x_n donde λ_1 objetos son iguales a x_1, λ_2 objetos son iguales a x_2,..., λ_n son iguales a x_n ($\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=n$,$\lambda_i\geq 0$) se pregunta cuantas permutaciones distintas hay de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La respuesta es $\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!..\lambda_n!}$. Esto se reduce a $\binom{n}{\lambda_1}$ si $\lambda_1+\lambda_2=n$.

El lector puede ahora demostrar la validez del desarrollo del binomio:

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$

O más generalmente,

$(x_1+\ldots+x_k)^n = \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=n}\frac{n!}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}x^{\lambda_1}x^{\lambda_2}\ldots x^{\lambda_k}$

Nota: Si en la formula del binomio ponemos a=b=1 resulta:

$2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$

Lo que muestra que el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n.

Generalización de la fórmula del binomio

Definamos para cualquier número real α y n=0,1,2,...

$(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \quad (\alpha_o=1)$
Generalizamos el número combinatorio por la definición:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha)_n}{n!}$$

Recordamos ahora el desarrollo de una función en serie de potencias: Si f(x) tiene derivadas de todos los ordenes en un entorno del cero tenemos:

$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{i}(0)}{i!}x^{i}$ donde $f^{i}(0)$ es la derivada de f de orden i evaluada en x=0

Esto nos sirve para mostrar formalmente la siguiente generalización del binomio

$f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^{i} \quad (|x|<1)$

(Observemos que $f^{i}(x)=(\alpha)_i (1+x)^{i+1} \Rightarrow f^{i}(0)=(\alpha)_i$)

Finalmente derivamos la siguiente identidad que necesitamos más adelante:

$$\binom{-\alpha}{k}(-1)^k = \binom{\alpha+k-1}{k}$$

Esto se ve de la siguiente manera:

$$\binom{-\alpha}{k}(-1)^k = \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}(-1)^k = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!}$$