Combinatoria

Práctica 1

1. Dado un grupo de n mujeres y sus maridos, determinar cuántas personas de este grupo de $2n$ personas se deben elegir para garantizar que entre las personas seleccionadas haya al menos un matrimonio.

2. Probar que en un grupo de 20 personas hay al menos dos de ellas que tienen la misma cantidad de amigos en el grupo.

3. Ciento dieciocho representantes de 13 laboratorios medicinales se han reunido en un edificio que posee tres salones de conferencias. Probar que cualquiera sea la forma en que todos los representantes sean distribuidos en los salones siempre habrá al menos 4 representantes de un mismo laboratorio en algún salón.

4. Dados tres puntos del plano $p_1 = (a_1, b_1)$, $p_2 = (a_2, b_2)$ y $p_3 = (a_3, b_3)$, definimos su centro como

$$c(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right)$$

Probar que dados 13 lattice points en el plano existen (al menos) tres de ellos cuyo centro es también un lattice point.

5. Usando el principio de los casilleros probar que (el desarrollo decimal de) alguna potencia de 17 termina en 0001.

6. Sea $S = \{1+3k \,/\, k = 0, 1, 2, \ldots, 33\}$. Probar que cualquier subconjunto de 20 elementos de S contiene al menos dos elementos cuya suma es 104.

7. Sea S un conjunto finito y sean $A_1, \ldots, A_{100}$ subconjuntos distintos de S tales que $|A_i| > \frac{2}{3}|S\,|$. Probar que $\exists\, x \in S$ tal que x pertenece al menos a 67 de los A_i.

8. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ tal que $|S\,| > n$.

i) Probar que existen al menos dos elementos de S que son coprimos.

ii) Probar que existen al menos dos elementos a y b de S tales que a es un divisor de b.

9. Sea S un conjunto de n elementos y sean $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos distintos de S tales que $A_i \cap A_j \neq \emptyset \ \forall i, j$. Probar que si $k \neq 2^{n-1}$ entonces existe un subconjunto T de S distinto de $A_1, \ldots, A_k$ tal que $T \cap A_i \neq \emptyset \ \forall i$.

10. i) Mostrar que para $\alpha = \pi$ y $n = 10$ el número racional $\frac{p}{q} = \frac{22}{7}$ satisface $|\alpha - \frac{p}{q}\,| \leq \frac{1}{10.q}$

ii) Hallar un número racional $\frac{p}{q}$ que satisfaga $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\,| \leq \frac{1}{10.q}$

11. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Probar que $\sum_{v \in V} i(v) = \sum_{v \in V} o(v)$.

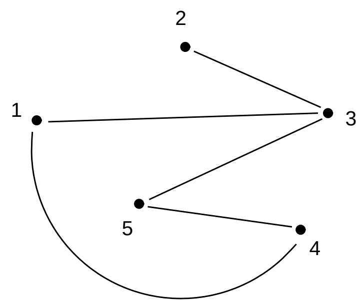
12. Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido). Probar que $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E\,|$ y deducir que G tiene una cantidad par de vértices de grado impar.

13. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Un subconjunto B de V se dice una *base de vértices* si satisface las siguientes dos propiedades:

1. $\forall v \in V - B$ existe un camino dirigido de u a v para algún $u \in B$.
2. Si B' es un subconjunto propio de B entonces existe $v \in V - B'$ tal que, cualquiera sea $u \in B'$, no existe un camino dirigido de u a v.

Probar que si $u \in B$ para alguna base de vértices B entonces $i(u) = 0$ o u pertenece a algún ciclo dirigido de G. Deducir que si G no contiene ciclos dirigidos entonces tiene una única base de vértices.

14 Dado el grafo G



calcular $\alpha(G)$ y $\chi(G)$.

15 Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido donde V es un conjunto de n números enteros y $\{a, b\} \in E$ si y sólo si $a \equiv b\ (8)\ (a, b \in V)$. Probar que si $n \geq 17$ entonces G contiene (al menos) un triángulo.

16 Probar que $K_{n,n}$ es el único grafo con $2n$ vértices y n^2 ramas que no contiene ningún triángulo.

17 i) Mostrar una coloración verde-rojo de los lattice points del conjunto $\{1, \ldots, 7\} \times \{1, 2\}$ que no contenga ningún rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices en 4 de esos puntos que tengan el mismo color.

ii) Idem i) para los lattice points del conjunto $\{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, 3\}$.