

Combinatoria

Práctica 2

1. Dar un ejemplo de un orden parcial en un conjunto de $m \cdot n$ elementos, de longitud m y ancho n .
2. Probar que el lema de Dilworth implica el teorema de Erdős-Szekeres.
3. Probar que el siguiente teorema, cuya demostración vimos en clase, implica el lema de Dilworth.

Teorema: Sea X un conjunto de n elementos y sea $\leq$ un orden parcial en X de longitud λ y ancho ω . Entonces $n \leq \lambda \cdot \omega$

4. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con $n^2 + 1$ elementos. Probar que existen $n + 1$ puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1}) \in S$ tales que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1}$ e $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n+1}$ o bien $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1}$ e $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{n+1}$.
5. Probar que dados $m \cdot n + 1$ enteros $a_1, \dots, a_{mn+1}$ tales que $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{mn+1}$, existen $m + 1$ de ellos $a_{i_1}, \dots, a_{i_{m+1}}$ tales que a_{i_j} no divide a a_{i_k} para todo $j \neq k$ o bien existen $n + 1$ de ellos $a_{i_1}, \dots, a_{i_{n+1}}$ tales que $a_{i_j} \mid a_{i_{j+1}}$ para todo j .

Diremos que un grafo es acíclico si no contiene ningún ciclo.

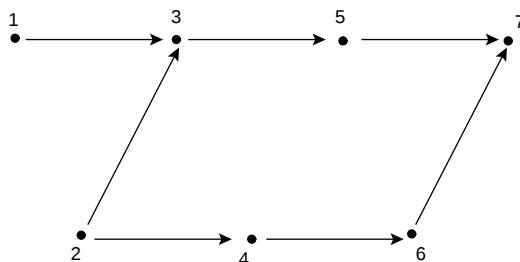
6. i) Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Probar que la relación $\leq$ en V definida por

$$u \leq v \text{ si existe un camino en } G \text{ de } u \text{ a } v$$

es un orden parcial si y sólo si G es acíclico.

En tal caso, diremos que $\leq$ es el orden en V inducido por G .

- ii) Dado el grafo dirigido G



hallar $\lambda(\leq)$ y $\omega(\leq)$, donde $\leq$ es el orden parcial inducido por G en $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

7. Sea X un conjunto finito y sea $\leq$ un orden parcial en X de longitud λ . Probar que X es la unión disjunta de λ anticadenas.

8. Sea X el conjunto de partes del conjunto $T = \{1, 2, \dots, n\}$, parcialmente ordenado por inclusión. Determinar cuántas cadenas de longitud n contienen a $S = \{1\}$.

Respuesta: $2(n-1)! + (n-2) \frac{(n-1)!}{2}$

9. Mostrar que existe una coloración rojo-verde de K_5 que no contiene ningún triángulo monocromático.

10. Probar que

i) $R(3, 4) > 8$

ii) $R(3, 5) = 14$

iii) $12 \leq R(5, 5) \leq 64$

11. Probar que $R(3, 3, 3) = 17$.

12. Probar que $S(1) = 2$, $S(2) = 5$ y $S(3) = 14$.

13. Probar que $W(1, m) = m$, $W(k, 1) = 1$, $W(k, 2) = k + 1$ y $W(2, 3) = 9$.