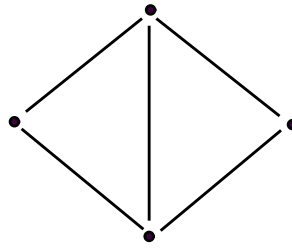


Combinatoria

Práctica 4

1. Probar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$.
2. Probar que $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}$.
3. Sea $f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$. Mostrar que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$
4. En una feroz batalla el 40% de los soldados perdieron una oreja, el 40% un ojo, el 40% una pierna, el 20% una oreja y un ojo, el 20% una oreja y una pierna, el 20% un ojo y una pierna y el 10% perdieron las tres cosas. ¿Cuántos soldados salieron indemnes?
5. Se fabrican caramelos de 4 gustos que se envasan al azar en bolsitas que contienen 12 caramelos cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsita contenga caramelos de todos los gustos?
6. Se tiran 8 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan todos los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ?
7. Usando el principio de inclusión y exclusión determinar cuántos de los enteros positivos menores o iguales que 100 no son divisibles ni por 2, ni por 3 ni por 5.
8. Cinco personas eligen 2 guantes al azar de una bolsa que contiene 5 pares de guantes. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna persona obtenga dos guantes que formen par?
9. ¿Cuántas palabras que no contengan ninguna de las secuencias “HOLA ” “VID”, “TEZ” ni “PUS” se pueden formar permutando todas las letras del alfabeto (cada letra debe aparecer exactamente una vez).
10. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 15 libros en 5 estantes si en cada estante debe haber al menos un libro pero no más de 4?
11. i) Demostrar que los números D_n (derangements) satisfacen $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$
ii) Usando i) demostrar que $D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}$
12. Sea $D(n, k)$ el número de permutaciones de n elementos que dejan exactamente k fijos.
i) Hallar $D(n, k)$
ii) Probar que $D(n, k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$. ¿Cómo puede interpretarse este resultado?

13. ¿De cuántas maneras se pueden colorear los vértices del grafo



usando n colores de forma tal que vértices adyacentes tengan distinto color?

Respuesta: $n^4 - 5n^3 + 8n^2 - 4n$

14. Si se distribuyen al azar r bolitas numeradas en n cajas, ¿cuál es la probabilidad de que resulten exactamente m cajas vacías?

Respuesta: $\binom{n}{m} \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{n-m}{i} \left(1 - \frac{m+i}{n}\right)^r$

15. De una urna que contiene n bolillas numeradas de 1 a n se extraen todas las bolillas, una a una y sin reponer. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente k coincidencias, donde una coincidencia significa que la bolilla i sale en la i -ésima extracción?

16. Bajo las hipótesis del teorema de Jordan, sea q_i el número de elementos de Ω que pertenecen a por lo menos i de los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Demostrar que $q_i = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} S_j$

17. Sean $i, k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Probar que

$$\sum_{j=0}^n \binom{k}{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$$