

Combinatoria

Práctica 5

1. Sean $k, c \in \mathbb{R}$. Hallar una fórmula explícita para el término general de la sucesión (a_n) definida por $a_0 = k$ y $a_n = c a_{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}$.
2. Dados $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, considere la relación de recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$. ¿Cuál es la solución si la ecuación característica $\alpha^2 = c_1 \alpha + c_2$ no tiene raíces reales?
3. Sea a_n la cantidad de vectores binarios de n componentes que no contienen dos ceros sucesivos. Mostrar que su relación de recurrencia es la misma que la de los números de Fibonacci.
4. Verificar que si $D(x)$ es la función generatriz de los derangements entonces

$$D^{(n)}(0) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

5. Probar que el número de Catalán C_{n+1} es igual a la cantidad de vectores binarios de $2n$ coordenadas tales que n de ellas son cero y las otras n son unos y satisfacen que, para todo i , en las primeras i coordenadas la cantidad de unos que aparecen es mayor o igual que la de ceros.
6. Probar que $\{1, (X)_1, (X)_2, (X)_3, \dots\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio de polinomios con coeficientes reales.

7. i) Probar que

$$\sum_{k=1}^n S(n, k) (-1)^{k+j} s(k, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{si } n \neq j \end{cases}$$

y

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} s(n, k) S(k, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{si } n \neq j \end{cases}$$

- ii) Usando i), probar el teorema de inversión:

Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y definimos $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ en la forma $g(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k) f(k)$

entonces $f(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} s(n, k) g(k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, si $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

es una función y definimos $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en la forma $f(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} s(n, k) g(k)$ entonces

$$g(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k) f(k) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

8. i) Hallar la función generatriz exponencial de la sucesión de los números de Bell.

ii) Verificar que la función generatriz exponencial de la sucesión de los números de Bell es $G(x) = e^{-1}e^{e^x}$.

9. Dada una sucesión $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ definimos, para cada $k \geq 0$, la sucesión $(\Delta^k \alpha_n)_{n \geq 0}$ inductivamente en la forma $\Delta^0 \alpha_n = \alpha_n$, $\Delta^1 \alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ y $\Delta^{k+1} \alpha_n = \Delta(\Delta^k \alpha_n)$.

i) Demostrar que, para todo $k \geq 0$,

$$\Delta^k \alpha_n = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \alpha_{n+j}$$

ii) Demostrar que, para todo $j \geq 0$,

$$\alpha_{n+j} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \Delta^k \alpha_n$$

10. Un mensaje es transmitido utilizando 2 símbolos, punto y raya. Si la transmisión de un punto dura un segundo y la transmisión de una raya dura dos segundos, ¿cuántos mensajes distintos pueden transmitirse en n segundos?

11. Demostrar que los números de Bell B_n satisfacen $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$, donde por convención tomamos $B_0 = 1$. Dar una interpretación combinatoria de esta igualdad.

12. Sea Ω un conjunto de n elementos. Diremos que un conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es un *álgebra* si valen

1) $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$, donde A' denota el complemento de A respecto de Ω .

¿Cuántas álgebras distintas hay?

Respuesta: B_n

13. Listar todas las particiones de $n = 8$.

14. Hacer un programa en la PC que calcule $p(n)$ para todo $n \leq 200$

15. Probar que el número de particiones de n en exactamente k partes es igual al número de particiones de n cuya mayor parte es igual a k .

16. Sea $p(n, k)$ el número de particiones de n en exactamente k partes.

i) Probar que $p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k)$.

ii) Probar que $p(n, k) = \sum_{j=1}^k p(n - k, j)$