Combinatoria

Práctica 6

1. Sea $(G, *)$ un grupo. Probar que el elemento neutro y el inverso de cada elemento de G son únicos.

2. Sea $(G, *)$ un grupo. Probar que si H es un subgrupo de G entonces $(H, *)$ es un grupo.

3. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sea e el elemento neutro de G. Probar que para todo $f \in G$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = e$, donde $f^k = \underbrace{f * f * \ldots * f}_{k \text{ factores}}$

4. Sea $(G, *)$ un grupo finito. Probar que un subconjunto H de G es un subgrupo si y sólo si $H \neq \emptyset$ y $f * g \in H \ \ \forall f, g \in H$.

5. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sea $f \in G$. Probar que si $k \in \mathbb{N}$ satisface $f^k = e$ entonces el subgrupo de G generado por f es $H = \{f, f^2, \ldots, f^k\}$.

6. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sea S un subconjunto no vacío de G. Probar que el subgrupo de G generado por S es $H = \{\{h_1 * h_2 * \ldots * h_n \,/\, n \in \mathbb{N} \text{ y } h_i \in S \ (1 \leq i \leq n)\}$.

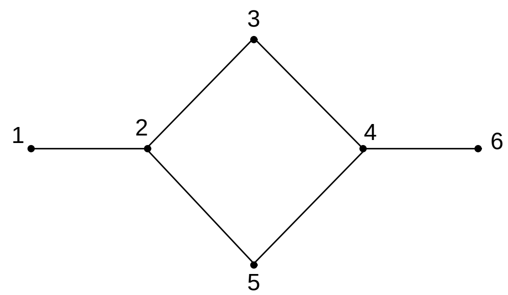
7. Hallar el subgrupo de S_7 generado por $\{(1\ 3\ 7),\ (1\ 5\ 7)\}$

8. Probar que $H = \{f \in S_4 \,/\, f(2) = 2\}$ es un subgrupo de S_4 y calcular su indicador de ciclos.

9. Hallar el conjunto de permutaciones de los vértices de un cubo correspondientes a todos los movimientos del cubo cuya posición final coincide con la inicial. ¿Es este conjunto un subgrupo de S_8? En tal caso, hallar su indicador de ciclos.

10. i) Hallar el indicador de ciclos del grupo de permutaciones de las aristas de un octaedro por rotaciones de simetría.
ii) Idem i) para las caras.

11. Dada la figura



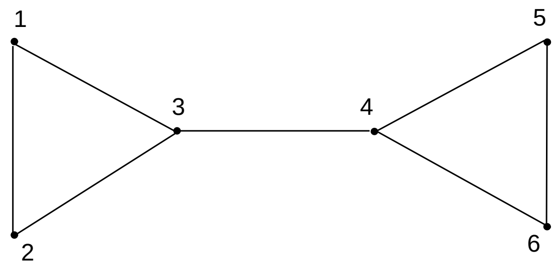
i) Determinar todos los movimientos en el espacio tales que la posición final de la figura coincide con la inicial.
ii) Hallar el subgrupo G de S_6 de todas las permutaciones de los vértices correspondientes a los movimientos hallados en i)
iii) Hallar el indicador de ciclos de G

12. Si se pintan los vértices de un octaedro de blanco o negro y se consideran equivalentes dos figuras si una puede obtenerse de la otra por una rotación, ¿cuántas figuras no equivalentes hay?

13. Si se pintan los vértices de un tetraedro de rojo, verde o azul y se consideran equivalentes dos figuras si una puede obtenerse de la otra por una rotación de simetría del tetraedro, ¿cuántas figuras no equivalentes hay?

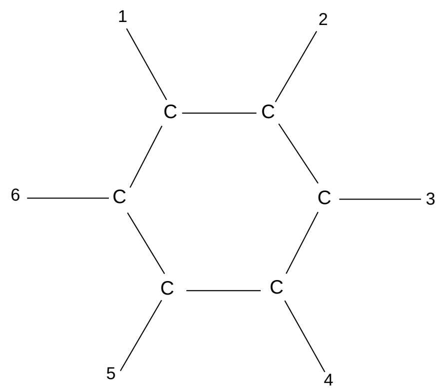
14. ¿Cuántos collares de 5 cuentas se pueden formar con cuentas blancas, negras y azules?

15. Supongamos que los vértices de la figura



son pintados de blanco o negro. Si se consideran equivalentes dos figuras cuando una se obtiene de la otra aplicando un movimiento en el espacio tal que la posición final de la figura coincida con la inicial, ¿cuántas figuras no equivalentes hay que tengan 2 vértices negros y 2 blancos?

16. Supongamos que una molécula tiene la estructura de la figura



donde en cada uno de los extremos numerados puede colocarse un átomo de hidrógeno o un radical. ¿Cuántas moléculas distintas que tengan 2 átomos de hidrógeno y 4 radicales pueden formarse?

17. Si se pintan las aristas de un tetraedro de rojo, verde o azul y se consideran equivalentes dos figuras si una puede obtenerse de la otra por una rotación de simetría del tetraedro, ¿cuántas figuras no equivalentes hay que tengan dos aristas rojas, una verde y tres azules?

18. Si pintamos los vértices de un cuadrado de rojo, blanco o azul y consideramos equivalentes dos figuras si una se obtiene de la otra por una rotación del cuadrado, ¿cuántas figuras no equivalentes hay que tengan exactamente dos vértices rojos?