

Combinatoria

Práctica 1

1. Encontrar el coeficiente de x^{22} en $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^5$.
2. Encontrar el coeficiente de x^{50} en $(x^6 + x^7 + x^8 + \dots)^6$.
3. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 que satisfagan $e_1 \geq 2$ y $e_4 \geq 1$ tiene la ecuación $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 29$?
4. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas e_1, e_2, e_3 que satisfagan $e_1 \leq 7$ y $e_2 \geq 3$ tiene la ecuación $e_1 + e_2 + e_3 = 75$?
5. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 18 bolillas numeradas en 7 cajas distintas con la condición de que en la primera caja haya al menos 3 bolillas?
6. ¿Cuántas combinaciones con repetición de tamaño 5 se pueden obtener usando las letras M, A, T y H, si las letras M y A pueden aparecer cualquier cantidad de veces pero las letras T y H pueden aparecer a lo sumo una vez?
7. Si se extraen n bolitas de una urna que contiene n bolitas azules, n rojas y n amarillas, ¿cuántos resultados hay en los que la cantidad de bolitas azules es par?
8. Si se extraen 25 caramelos de una bolsa que contiene caramelos de 7 gustos distintos, (una cantidad arbitrariamente grande de cada gusto) cuántos resultados posibles hay en los que la cantidad de caramelos de cada gusto sea mayor o igual que 2 y menor o igual que 6?
9. Mostrar que

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots).(1 + x^2 + x^4 + \dots).(1 + x^3 + x^6 + \dots).(1 + x^4 + x^8 + \dots)$$

es la función generatriz que resuelve el problema de hallar todas las soluciones enteras e_1, e_2, e_3, e_4 de la ecuación $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ que satisfacen $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4$.

10. Sea $n \geq 5$. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 enteros del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tales que ningún par de ellos sean consecutivos?
11. Probar que la cantidad de maneras en que se pueden ubicar 15 libros en 5 estantes con la condición de en cada estante haya al menos un libro pero no más de 4 es el coeficiente de X^{15} de $15!(x + x^2 + x^3 + x^4)^5$.

12. Probar que la cantidad de maneras en que pueden ubicarse 15 bolitas indistinguibles en 5 cajas numeradas con la condición de que la caja i tenga más bolitas que la caja $i - 1$ para todo i entre 2 y 5 es el coeficiente de x^{15} de

$$\left(\frac{1}{1-x^5}\right) \left(\frac{x^4}{1-x^4}\right) \left(\frac{x^3}{1-x^3}\right) \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)$$

13. Si se arroja 6 veces un dado, ¿cuántos resultados hay que satisfacen que la suma de los números obtenidos sea 25?

14. ¿De cuántas maneras se puede formar un peso con monedas de 1, 5 y 10 centavos?