Combinatoria

Práctica 2

1. Probar que $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$.

2. Probar que $\binom{\frac{1}{2}}{n}=\frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}$.

3. Sea $f_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$. Mostrar que $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$

4. En una feroz batalla el 40% de los soldados perdieron una oreja, el 40% un ojo, el 40% una pierna, el 20% una oreja y un ojo, el 20% una oreja y una pierna, el 20% un ojo y una pierna y el 10% perdieron las tres cosas. ¿Cuántos soldados salieron indemnes?

5. Se fabrican caramelos de 4 gustos que se envasan al azar en bolsitas que contienen 12 caramelos cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsita contenga caramelos de todos los gustos?

6. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 300 bolitas indistinguibles en 6 cajas distintas con la condición de que en cada caja haya a lo sumo 70 bolitas?

7. Se tiran 8 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan todos los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ?

8. Usando el principio de inclusión y exclusión determinar cuántos de los enteros positivos menores o iguales que 100 no son divisibles ni por 2, ni por 3 ni por 5.

9. Cinco personas eligen 2 guantes al azar de una bolsa que contiene 5 pares de guantes. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna persona obtenga dos guantes que formen par?

10. ¿Cuántas palabras que no contengan ninguna de las secuencias "HOLA " "VID", "TEZ" ni "PUS" se pueden formar permutando todas las letras del alfabeto (cada letra debe aparecer exactamente una vez).

11. Determinar la cantidad de maneras en que se pueden ubicar 15 libros en 5 estantes con la condición de que en cada estante haya al menos un libro pero no más de 4, usando el principio de inclusión y exclusión. Comparar con el ejercicio 11 de la práctica 3.

12. i) Demostrar que los números D_n (derangements) satisfacen $D_{n+1}=n(D_n+D_{n-1})$

ii) Usando i) demostrar que $D_{n+1}=(n+1)D_n+(-1)^{n+1}$

13. ¿Cuántos de los desarreglos del número 123456 tienen al 1 en el lugar que originalmente ocupa el 5?

14. Sea $D(n,k)$ el número de permutaciones de n elementos que dejan exactamente k fijos.

i) Hallar $D(n,k)$

ii) Probar que $D(n,k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$. ¿Cómo puede interpretarse este resultado?

15. De una urna que contiene n bolillas numeradas de 1 a n se extraen todas las bolillas, una a una y sin reponer. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente k coincidencias, donde una coincidencia significa que la bolilla i sale en la i-ésima extracción?

16. Si se distribuyen al azar r bolitas numeradas en n cajas, ¿cuál es la probabilidad de que resulten exactamente m cajas vacías?

Respuesta: $\binom{n}{m} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{n-m}{i} \left(1 - \frac{m+i}{n}\right)^r$

17. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse $n+2$ bolillas numeradas en k cajas iguales si ninguna caja puede quedar vacía, la bolilla 1 debe estar sola en una caja y la bolilla 2 no puede estar sola en una caja.

18. Determinar cuántas permutaciones de S_5 tienen 3 ciclos.

19. Bajo las hipótesis del teorema de Jordan, sea q_i el número de elementos de Ω que pertenecen a por lo menos i de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Demostrar que $q_i = \displaystyle\sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} S_j$

20. Sean $i, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Probar que

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$$