Combinatoria

Práctica 3

1. Sean $k, c \in \mathbb{R}$. Hallar una fórmula explícita para el término general de la sucesión (a_n) definida por $a_0 = k$ y $a_n = c\, a_{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}$.

2. Dados $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, considere la relación de recurrencia $a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2}$. ¿Cuál es la solución si la ecuación característica $\alpha^2 = c_1\, \alpha + c_2$ no tiene raíces reales?

3. Sea a_n la cantidad de vectores binarios de n componentes que no contienen dos ceros sucesivos. Mostrar que su relación de recurrencia es la misma que la de los números de Fibonacci.

4. Sea (a_n) la sucesión definida por recurrencia en la forma

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 2\, a_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

Hallar una fórmula explícita para a_n.

5. Sea (a_n) la sucesión definida por recurrencia en la forma

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 9, \qquad a_n = 3\, a_{n-1} + 4\, a_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

Hallar una fórmula explícita para a_n.

6. Sea (a_n) la sucesión definida por recurrencia en la forma

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 2^{n-1} + 3a_{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

Probar que la función generatriz de la sucesión (a_n) es $\dfrac{x}{(1-3x)(1-2x)}$ y, usando esto, hallar una fórmula explícita para a_n.

7. Sea (a_n) la sucesión definida por recurrencia en la forma

$$a_0 = 1, \qquad a_n = n\, a_{n-1} + 2^{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

i) Hallar la función generatriz exponencial de la sucesión (a_n)

ii) Probar, usando i), que $a_n = n! \left(1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{(i+1)!}\right)$

8. Se tienen tres tipos de cajas: rojas, verdes y amarillas. Las cajas rojas y verdes tienen 1 metro de altura y las amarillas 2 metros. ¿Cuántas pilas distintas de n metros de altura se pueden formar con estas cajas? (se supone que, de cada tipo, se dispone de tantas cajas como sean necesarias).

9. Verificar que si $D(x)$ es la función generatriz de los derangements entonces

$$D^{(n)}(0) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

10. Probar que el número de Catalán C_{n+1} es igual a la cantidad de vectores binarios de $2n$ coordenadas tales que n de ellas son cero y las otras n son unos y satisfacen que, para todo i, en las primeras i coordenadas la cantidad de unos que aparecen es mayor que la de ceros.

11. Probar que $\{1, (X)_1, (X)_2, (X)_3, \ldots\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio de polinomios con coeficientes reales.

12. i) Probar que

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(-1)^{k+j} s(k,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{si } n \neq j \end{cases}$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k) S(k,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{si } n \neq j \end{cases}$$

ii) Usando i), probar el teorema de inversión:

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y definimos $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en la forma $g(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) f(k)$ entonces $f(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k) g(k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, si $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y definimos $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en la forma $f(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k) g(k)$ entonces $g(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) f(k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13. Verificar que la función generatriz exponencial de la sucesión de los números de Bell es $G(x) = e^{-1} e^{e^x}$.

14. Dada una sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ definimos, para cada $k \geq 0$, la sucesión $(\Delta^k \alpha_n)_{n\geq 0}$ inductivamente en la forma $\Delta^0 \alpha_n = \alpha_n$, $\Delta^1 \alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ y $\Delta^{k+1} \alpha_n = \Delta(\Delta^k \alpha_n)$.

i) Demostrar que, para todo $k \geq 0$,

$$\Delta^k \alpha_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \alpha_{n+j}$$

ii) Demostrar que, para todo $j \geq 0$,

$$\alpha_{n+j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \Delta^k \alpha_n$$

15. Un mensaje es transmitido utilizando 2 símbolos, punto y raya. Si la transmisión de un punto dura un segundo y la transmisión de una raya dura dos segundos, ¿cuántos mensajes distintos pueden transmitirse en n segundos?

16. Demostrar que los números de Bell B_n satisfacen $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$, donde por convención tomamos $B_0 = 1$. Dar una interpretación combinatoria de esta igualdad.

17. Sea Ω un conjunto de n elementos. Diremos que un conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es un *álgebra* si valen

1) $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$, donde A' denota el complemento de A respecto de Ω.

¿Cuántas álgebras distintas hay?

Respuesta: B_n

18. Listar todas las particiones de $n = 8$.

19. Hacer un programa en la PC que calcule $p(n)$ para todo $n \leq 200$

20. Probar que el número de particiones de n en exactamente k partes es igual al número de particiones de n cuya mayor parte es igual a k.

21. Sea $p(n,k)$ el número de particiones de n en exactamente k partes.

i) Probar que $p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$.

ii) Probar que $p(n,k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p(n-k,j)$