

1. Sea $\mathcal{F}(t) = \mathcal{U}(W(s), s \leq t)$. Determinar cuáles de los siguiente procesos son $\mathcal{F}(t)$ adaptados.

- a) $X(t) = W(\frac{t}{2})$
- b) $X(t) = W(2t)$
- c) $X(t) = 2W(t)$
- d) $X(t) = W(t)W(\frac{t}{2})$
- e) $X(t) = W(t)W(2t)$.

2. Sea $X(\cdot)$ un proceso $(\mathcal{F}(t))_{t \geq 0}$ adaptado con trayectorias continuas. Probar que $X(\cdot)$ es progresivamente medible. Sugerencia: Aproximar a $X(\cdot)$ por procesos simples. Observar que el mismo resultado vale para procesos con trayectorias solo continuas a derecha (izquierda).

3. Sea $g \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ con $g(0) = g(1) = 0$, entonces

$$\int_0^1 g dW = - \int_0^1 g' W dt.$$

4. Probar que

$$\int_0^t W^2 dW = \frac{1}{3}W(t)^3 - \int_0^t W(s) ds.$$

5. Sea $P^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = T\}$ una partición de $[0, T]$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ fijo. Definimos las sumas de Riemann

$$R_n^\lambda := \sum_{j=0}^{k_n} W(\tau_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)), \quad \tau_j^n := (1 - \lambda)t_j^n + (1 - \lambda)t_{j+1}^n.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\lambda = \frac{W(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T, \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

En particular, si permitimos elegir arbitrariamente τ_j^n , R_n no tiene límite.

6. Probar que si $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ (integrables hasta T), entonces

$$E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) = E \left(\int_0^T GH dt \right).$$

7. Usar la regla de la cadena de Itô para probar que $Y(t) := e^{\frac{t}{2}} \cos(W(t))$ es una martingala.

8. Sea $W(\cdot)$ un proceso de Wiener. Calcular $d(W^m)$, $m \geq 1$.

9. Encontrar un proceso $A(\cdot)$ para que

$$\cos(t)W^5(t) + A(t)$$

sea una Martingala.

10. Usando la fórmula de Itô obtener una EDO para $g(t) = E(e^W(t))$ y calcularla.

11. Sea $W(\cdot) = (W^1, \dots, W^n)$ un movimiento Browniano n -dimensional, y sea $Y(t) := |W(t)|^2 - nt$ para tiempos $t \geq 0$. Mostrar que $Y(\cdot)$ es una martingala.

12. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que

$$E \left(e^{\int_0^T g dW} \right) = e^{\frac{1}{2} \int_0^T g^2 ds}.$$