1. Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas ($W(\cdot)$ es un Browniano unidimensional).

   (a) $dX(t) = \frac{1}{2}X(t)dt + dW(t), \qquad X(0) = 1.$

   (b) $dX(t) = -\frac{1}{1+t}X(t)dt + \frac{1}{1+t}dW(t), \qquad X(0) = 0.$

   (c)
$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dW, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Sean $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ dos procesos con trayectorias continuas tales que para todo $t \geq 0$, $E(|X(t) - Y(t)|^2) = 0$. Probar que entonces
$$P(X(t) = Y(t) \forall\, t \geq 0) = 1.$$

3. Sea (X_n) una suceción de variables aleatorias. Probar que si para $m \geq n$ vale $E(|X_m - X_n|^2) \leq a_n$, con $\sum a_n < \infty$, entonces existe una v.a. X tal que $X_n \to X$ p.p.

4. Consideremos la ecuación
$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)d\mathbf{W},$$
donde $\mathbf{b}$ y $\mathbf{B}$ son como en el teorema de existencia y unicidad.

   (a) Probar que existe una constante $L \geq 0$ tal que
$$|\mathbf{b}(x,t) - \mathbf{b}(\hat{x},t)| + |\mathbf{B}(x,t) - \mathbf{B}(\hat{x},t)| \leq L(1 + |x|), \qquad \text{para todo } x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$$

   (b) Probar que la solución hallada por el método de aproximaciones sucesivas es progresivamente medible.

5. Un candidato natural para lo que podríamos llamar *Movimiento Browniano en la elipse*
$$\{(x,y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \qquad (a, b > 0)$$
es el proceso $X(t) = (a\cos(W(t), b\sin(W(t)))$. Probar que es solución de
$$dX(t) = -\frac{1}{2}X(t)dt + MX(t)dW(t).$$
¿Quién es M?

6. Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas ($\mathbf{W}$ es un Browniano multidimensional)

(a)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} d\mathbf{W},$$

(b)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} d\mathbf{W},$$

7. Probar que hay una única solución $X(\cdot)$ de la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \ln(1 + X^2(t))dt + \chi_{\{X(t)>0\}}X(t)dW(t), \qquad X(0) = a \in \mathbb{R}.$$

8. Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX = \frac{1}{2}\sigma'(X)\sigma(X)dt + \sigma(X)dW, \qquad X(0) = 0,$$

donde σ es una función suave y positiva.

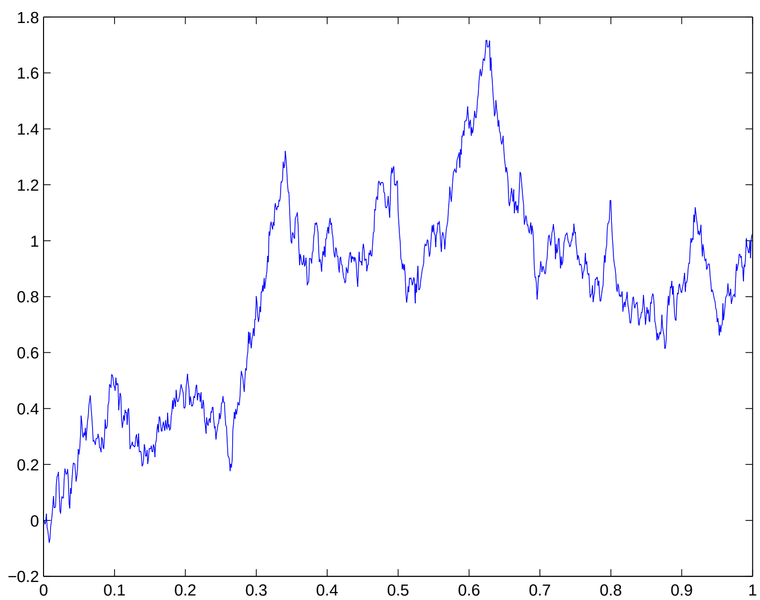
9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considerar la siguiente ecuación

$$dY(t) = \frac{b - Y(y)}{1-t}dt + dW(t), \qquad 0 \leq t \leq 1, Y_0 = a.$$

Verificar que

$$Y(t) = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dW}{1-s}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

resuelve la ecuación y probar que $\lim_{t\to 1^-} Y(t) = 1$ p.p. A este proceso se lo llama *Puente Browniano de a a b*



Una trayectoria del puente Browniano.