
Lista de ejercicios número 5 (Junio 2007)

El Teorema de De Giorgi – Nash – Moser y El principio de Compacidad por Concentración

---

1. Sea $u \in L^\infty_{\text{loc}}(U)$ y $0 < \alpha < 1$ tal que
$$\text{osc}_{B_r} u \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^\alpha \sup_{B_R} |u|,$$
para toda bola $B_R \subset\subset U$ y $0 < r < R$, donde la oscilación de u se define como
$$\text{osc}_A u := \sup_A u - \inf_A u$$
y C es una constante independiente de r.
Probar que $u \in C^\alpha_{\text{loc}}(U)$.

---

2. Usar el método de iteración de Moser para probar que si $u \in H^1_{\text{loc}}(U) \cap L^2(U)$ es una solución débil de
$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f$$
con $f \in L^\infty(U)$, entonces $u \in L^\infty_{\text{loc}}(U)$ y se tiene la estimación
$$\|u\|_{L^\infty(V)} \leq C(\|u\|_{L^2(U)} + \|f\|_{L^\infty(U)}),$$
donde C depende de la elipticidad de $(a_{i,j})$, de la dimensión n y de la distancia de V a la frontera de U.
(Sugerencia: Usar $\eta^2 u_M^\beta$ como función test donde $u_M = \min\{|u|, M\}$)

---

3. Probar la desigualdad de Harnack para soluciones débiles no-negativas de
$$\mathcal{L}u := \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f$$
con $f \in L^\infty(U)$, donde $\mathcal{L}$ es uniformemente elíptico.
(Sugerencia: verificar que si u es una solución de $\mathcal{L}u = f$ entonces $u \pm M|x|^2$ es sub o super solución de $\mathcal{L}u = 0$ para M grande dependiendo de $\|f\|_{L^\infty(U)}$)

---

4. Aplicar el método de compacidad por concentración para probar la existencia de una solución débil no trivial para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + \lambda |u|^{q-2}u & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$$

para $1 < q < 2$, si $0 < \lambda < \lambda_0$. Estimar λ_0.

---

5. Usar la siguiente desigualdad

$$\left(\int_{\partial U} |v|^{2_*} \, dS \right)^{2/2_*} \leq \frac{1}{T} \int_U |\nabla v|^2 \, dx + B \int_U v^2 \, dx$$

$2_* = 2(n-1)/(n-2)$ es el exponente crítico en la inmersión de trazas $H^1(U) \subset L^q(\partial U)$ y $T > 0$ es la constante óptima en la desigualdad de trazas,

$$T = \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla v|^2, dx}{\left(\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} |v|^{2_*} \, dS \right)^{2/2_*}} \mid v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \right\},$$

para probar que existe un minimizante para el cociente

$$\lambda = \inf_{v \in H^1(U), \ v \not\equiv 0} \frac{\int_U |\nabla v|^2 + v^2 \, dx}{\left(\int_{\partial U} |v|^{2_*} \, dS \right)^{2/2_*}}$$

si el dominio U verifica

$$\frac{|U|_n}{|\partial U|_{n-1}^{2/2_*}} < T.$$

Exhibir dominios U que verifiquen la desigualdad anterior.
