ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 1
Primer Cuatrimestre 2003

Primera parte: Resolución de ecuaciones de primer orden

1. **Separación de variables**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\dot{x} = \dfrac{x}{t}$
   (b) $\dot{x} = \dfrac{t^2}{x}$
   (c) $\dot{x} = \dfrac{1+t}{1-x}$
   (d) $\dot{x} = te^x$
   (e) $\dot{x} = t^2 \operatorname{sen} x$
   (f) $\dot{x} = \sqrt{t+x} - 1$ (Sug: considerar $y = t + x$)

2. **Ecuaciones homogéneas**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\dot{x} = \dfrac{x}{t} + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2$
   (b) $\dot{x} = -\dfrac{t+x}{t}$

3. **Ecuaciones lineales. Ecuación de Bernoulli**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $t\dot{x} - x = t^2$
   (b) $t\dot{x} + 2x = t^4$
   (c) $t\dot{x} + x - e^t = 0$
   (d) $t\dot{x} + x + t^2x^2 = 0$
   (e) $3t\dot{x} = x\,(1 + t\operatorname{sen} t - 3x^3 \operatorname{sen} t)$

4. **Ecuaciones exactas. Factor Integrante**

   Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $(x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0$
   (b) $(x^2+y^2+2x)\,dx + 2xydy = 0$
   (c) $(x^3-3xy^2+2)\,dx - (3x^2y-y^2)\,dy = 0$
   (d) $(x+y^2)\,dx - 2xydy = 0$
   (e) $y\,(1+xy)\,dx - xdy = 0$

5. **Problemas con condiciones iniciales**

   Encontrar la solución de

   (a) $\dot{x} = \frac{x}{t} \quad x\,(1) = 3$
   (b) $\dot{x} = \frac{x}{2t} \quad x\,(9) = 2$
   (c) $\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{t}{x} \quad x\,(2) = 4$
   (d) $tx^2dx = (t^3+x^3)\,dt \quad x\,(1) = 1$
   (e) $\ln(x^2+1) + \frac{2x\,(t-1)}{x^2+1}\dot{x} = 0 \quad x\,(2) = 0$
   (f) $t + x^2 - 2tx\dot{x} = 0 \quad x\,(1) = 2$
   (g) $\dot{x} - \frac{n}{t}x = e^t t^n \quad x\,(1) = e+3$
   (h) $\dot{x} = \lambda x^2 \quad x\,(t_0) = x_0$

Segunda parte: Existencia de Soluciones

6. **Lema de Gronwall**

   Sean u y v funciones continuas no negativas en $[a, b]$ tales que, para $\alpha \geq 0$, satisfacen

   $$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \quad , t \in [a, b]$$

   Probar que

   $$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

   En particular si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$.

7. **Existencia**

   (a) Probar que el problema de valores iniciales

   $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t, u) & t \in (t_0, t_1) \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

   donde f es continua y $u \in C[t_0, t_1] \cap C^1(t_0, t_1)$, es equivalente a la ecuación integral

   $$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau$$

   (b) Mostrar que si f es Lipschitz en la segunda variable y $t_1 - t_0$ es suficientemente pequeño, la ecuación integral tiene un único punto fijo.

8. **Intervalo maximal de existencia**

   (a) Probar que el problema

   $$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) Hallar el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} \dot{x} = x^p \\ \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

(c) Probar que el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

es finito si y sólo si

$$\int^{\infty} \frac{1}{f(s)}\, ds < \infty$$

9. **Unicidad**

Estudiar la unicidad del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{1/3} \\ \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

10. **Sistemas**

Sean $f, g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continuas y f Lipschitz. Probar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x(0) = x_0 \\ \\ \dot{y} = g(x)y, & y(0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución unica en cualquier intervalo donde este definida. Se puede quitar la hipotesis de que f sea Lipschitz?