

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 2
Primer Cuatrimestre 2003

Sistemas Lineales

1. (a) Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas.
En ii. y iv. resolver además el problema de valores iniciales.

$$\text{i. } \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$$
$$\text{iii. } \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} \dot{x} = -2y & x(0) = 3 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$$

- (b) ¿Cuáles son las soluciones $(x(t), y(t))$ que verifican

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x(t), y(t))\| = 0?$$

¿Cuáles verifican

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x(t), y(t))\| = \infty?$$

- (c) Esbozar los diagramas de fases.
2. Sea A una matriz de 2×2 con autovalores reales λ y μ asociados respectivamente a los autovectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Esbozar el diagrama de fases de $x' = Ax$ si
- (a) $0 < \lambda < \mu$
 - (b) $\lambda < 0 < \mu$
 - (c) $\lambda = 0, \mu < 0$
 - (d) $\lambda < \mu < 0$

3. Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + bx' + cx = 0 \quad \text{con } b, c \text{ constantes} \quad (1)$$

- (a) Examinando el sistema de primer orden equivalente probar que (1) tiene una única solución para toda condición inicial $x(0) = u$, $x'(0) = v$.

- (b) ¿Qué hipótesis sobre b y c asegura que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ para toda solución $x(t)$?

4. (a) Graficar el diagrama de fases de un sistema bidimensional

$$x' = Ax \quad A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$$

y encontrar la solución general, en los siguientes casos:

- i. A tiene autovalores reales de distinto signo
- ii. A tiene dos autovalores reales negativos (A a diagonalizable)
- iii. A tiene un autovalor negativo pero no es diagonalizable
- iv. A tiene autovalores complejos conjugados $a \pm bi$ con $a < 0$
- v. Idem (iv) con $a = 0$
- vi. Idem (iv) con $a > 0$
- vii. Idem (ii) con autovalores positivos
- viii. Idem (iii) con autovalor positivo

- (b) ¿En cuáles de los items anteriores se verifica $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ con cualquier condición inicial? ¿En cuáles se verifica $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = \infty$?

5. (a) Resolver la ecuación diferencial en \mathbf{R}^3 $x' = Ax$ en los siguientes casos:

$$\text{i. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (1, 2, 1)$$

$$\text{iii. } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{iv. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (2, 1, 1)$$

- (b) Analizar el comportamiento asintótico de las soluciones.

6. Probar que una matriz es nilpotente si y sólo si todos sus autovalores son nulos.

7. Comprobar, en cada caso, que las siguientes matrices son nilpotentes y encontrar su forma canónica.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Sea A una matriz real 3×3 que no es diagonal. Si $(A + Id)^2 = 0$, hallar la forma canónica real de A .

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice *semisimple* si es diagonalizable en \mathbb{C} .

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real no positiva.
- (a) Si A es semisimple, probar que toda solución de $x' = Ax$ se mantiene acotada cuando $t \rightarrow +\infty$.
- (b) ¿Qué sucede si A no es semisimple?
10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y supongamos que todas las soluciones de $x' = Ax$ son periódicas del mismo período. Entonces A es semisimple y el polinomio característico es una potencia de $t^2 + a^2$ con $a \in \mathbb{R}$.

11. Encontrar todas las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}$$

12. Encontrar la solución de

$$\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \sin(t) \end{cases}$$

- (a) que verifique $x(1) = 2$ $y(1) = 7$
- (b) que verifique $x(1) = 0$ $y(1) = 0$

13. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' - 8y' + 16y = 0$

(b) $y'' - 2y' + 10y = 0$

(c) $y'' - y' - 2y = 0$

14. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

(a) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2$

(b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{2t}$

(c) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^t \cos 2t$

15. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = \exp(-x)$ que verifiquen:

(a) $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

(b) $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$

(d) $y'(0) = 1$