ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
Práctica 2 - Parte B
Primer Cuatrimestre 2003

Sistemas Lineales

1. Halle los subespacios estables, inestables y centrales (E^s, E^u y E^c) del sistema lineal
$$x' = Ax \tag{1}$$
para las siguientes matrices.
$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\text{(d) } A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(e) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
En cada caso, también esboce el diagrama de fases. ¿Cuáles de estas matrices define un flujo hiperbólico, e^{At}?

2. Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $x(t)$ la solución de (1) con $x(0) = x_0$. Muestre que
   (a) si $x_0 \in E^s - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to-\infty} |x(t)| = \infty$;
   (b) si $x_0 \in E^u - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$;
   (c) si $x_0 \in E^c - \{0\}$ y A es semisimple, entonces existen constantes positivas m y M tales que, para todo $t \in \mathrm{R}$, $m \le |x(t)| \le M$.

3. Muestre que las únicas líneas invariantes para el sistema lineal (1) con $x \in \mathrm{R}^2$ son las líneas $ax + by = 0$ donde $v = (-b, a)$ es un autovector de A.

4. Utilice el método de variación de las constantes para hallar la solución general del sistema
$$x' = Ax + b(t) \tag{2}$$
donde $b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ es continuo.

5. Resuelva el sistema no homogéneo (2) con
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$
y condición inicial $x(0) = (1, 0)$.

6. Pruebe el siguiente Teorema:

   Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $B(t) \in \mathrm{R}^{n\times n}$ continua para $t \ge t_0$.

   Probar que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa y que si $\|B(t)\| \to 0$ $(t \to \infty)$, entonces las soluciones de
$$x' = Ax + B(t)x \tag{3}$$
verifican $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ (y luego, 0 es asintóticamente estable).

7. Determine la estabilidad de $x = 0$ para el sistema (3) si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 & 0 \\ te^{-t^2} & t^2e^{-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

8. Para qué valores de a es la solución $x = 0$ asintóticamente estable o inestable (ignore los casos con autovalores de parte real cero) para el siguiente sistema

$$x' = A(t)x$$

dónde

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)\frac{1-t}{t} & -1 & a\frac{1-t}{t} \end{pmatrix}.$$