ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 3
Primer Cuatrimestre 2003
Dependencia en condiciones iniciales y parámetros

1. Sea $U \subset \mathrm{R}^k$ abierto y sea $A : (-\alpha, \alpha) \times U \to \mathrm{R}^{n\times n}$ continua. Probar que para todo $0 < a < \alpha$ y $K \subset U$ compacto, el problema

$$\begin{cases} \Phi' &= A(t,y)\Phi \\ \Phi(0) &= Id \end{cases}$$

tiene solución única en $[-a, a]$ y es continua en $[-a, a] \times K$ (Id representa la identidad en $\mathrm{R}^{n\times n}$).

Sugerencia: Utilizar el método de las aproximaciones sucesivas para la existencia y el lema de Gronwall para la unicidad.

2. Revisar el Teorema de diferenciabilidad respecto de condiciones iniciales y verificar que la misma prueba sirve para los problemas no autónomos (i.e. $f = f(x, t)$).

3. *Dependencia respecto de los parámetros*

Sea $f = f(x, t, \mu)$ de clase C^1 con $x \in U \subset \mathrm{R}^n$, $t \in [-a_0, a_0] \subset \mathrm{R}$, $\mu \in V \subset \mathrm{R}^m$ y sea $(x_0, \mu_0) \in U \times V$.

Probar que existe $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,t,\mu) \\ x(0) &= y \end{cases}$$

tiene una única solución $u(t, y, \mu)$ con $u \in C^1(G)$ donde $G = [-a, a] \times B_\delta(x_0) \times B_\delta(\mu_0)$.

Sugerencia: Reducir al teorema anterior llamando $\overline{x} = (x, \mu)$.

4. En las mismas hipótesis del ejercicio anterior, ver que el problema

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,t,\mu) \\ x(t_0) &= y \end{cases}$$

tiene una única solución $u(t, t_0, y, \mu)$ con $u \in C^1(Q)$ donde $Q = [-a, a] \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B_\delta(x_0) \times B_\delta(\mu_0)$.

5. Hallar el intervalo maximal de existencia $I_{max} = (\alpha, \beta)$ para los siguientes problemas de valores iniciales y si $\alpha > -\infty$ o $\beta < \infty$ estudie el límite de la solución cuando $t \to \alpha^+$ o $t \to \beta^-$ respectivamente.

   (a) $\dot{x} = x^2 - 4 \qquad x(0) = 0$ (b) $\dot{x} = x^2 \qquad x(0) = x_0$

   (c) $\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_1^2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^{-1} & x_2(0) = 1 \end{array}$ (d) $\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = \frac{1}{2x_1} & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = x_1 & x_2(0) = 1 \end{array}$

Flujos

6. Probar que las siguientes "fórmulas" definen flujos globales en E y hacer un bosquejo el correspondiente diagrama de fases

   (a) $E = \mathrm{R}^2 \qquad \varphi\,(t,(x,y)) = (e^t x, e^t y)$

   (b) $E = \mathbb{C} \qquad \varphi\,(t,z) = e^{(i-1)t} z$

   (c) $E = \mathrm{R}^2 \qquad \varphi\,(t,(x,y)) = (x, tx + y)$

   (d) $E = \mathrm{R}^2 \qquad \varphi\,(t,(x,y)) = (e^{-t} x, e^{-t}(tx + y))$

7. Determinar el flujo inducido por el campo $x \mapsto x^2$ sobre $E = \mathrm{R}$ Cuál es Ω y $J(x)$ para $x \in \mathrm{R}$?

   Si $\Omega_t := \{x \in E \,/\, (t,x) \in \Omega\}$, determinar Ω_t para $t \in \mathrm{R}$.

   Si $\varphi_t : \Omega_t \to E$, $\varphi_t(x) := \varphi(t,x)$, describir el comportamiento de las transformaciones φ_t y φ_{-t}.

8. Sea $\varphi : \mathrm{R} \times E \to E$ un flujo con $E \subset \mathrm{R}^n$ abierto. Probar que, para todo $t \in \mathrm{R}$, $\varphi_t : E \to E$ es un homeomorfismo.

9. Sea $\varphi : \mathrm{R} \times E \to E$ un flujo. Sea $p_0 \in E$ cualquiera. La función $\varphi(\cdot, p_0) : \mathrm{R} \to E$ es una curva continua de R en E que se llama órbita o trayectoria de p_0. A veces también se llama órbita o trayectoria de p_0 al conjunto imagen de esa función que denotaremos $\mathcal{O}(p_0)$

$$\mathcal{O}(p_0) = \{\varphi(t, p_0) \,/\, t \in \mathrm{R}\}\,.$$

   Probar que dos órbitas distintas no se cortan.

10. Sea φ un flujo en $E \subset \mathrm{R}^n$ abierto. Probar que

(a) El conjunto de los puntos críticos es cerrado.

(b) Sean x, $y \in E$. Si $\varphi(t, y) \to x$ cuando $t \to t^+(y)$, o bien cuando $t \to t^-(y)$, entonces x es un punto crítico.

11. Determinar el flujo $\phi : \mathrm{R} \times \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ dado por el sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $f(x) = (-x_1, -x_2 + x_1^2, -x_3 + x_1^2)$ y mostrar que el conjunto $S = \{x \in \mathrm{R}^3 : \; x_3 = -x_1^2/3\}$ es invariante bajo ϕ.