ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 4
Primer Cuatrimestre 2003

Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

1. Dados los siguientes operadores lineales A en R^n, decidir si $0 \in \mathrm{R}^n$ es un punto de equilibrio estable de $x' = Ax$:

$$\text{(a) } A \equiv 0 \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

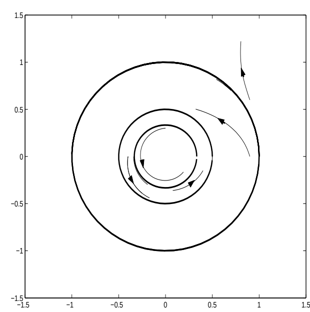
$$\text{(d) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(e) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea A un operador lineal en R^n cuyos autovalores tienen todos parte real nula. Entonces $0 \in \mathrm{R}^n$ es un punto de equilibrio estable de $x' = Ax$ sii A es semisimple. Además 0 nunca es asintóticamente estable.

3. Si $\bar{x}$ es un sumidero de un sistema dinámico (es decir, $\bar{x}$ es un punto de equilibrio y 0 es un sumidero del sistema linearizado alrededor de $\bar{x}$) entonces $\bar{x}$ tiene un entorno que no contiene otros puntos de equilibrio.

4. Mostrar que el diagrama de flujo del sistema lineal perturbado (P), donde $r^2 = x^2 + y^2$, tiene el siguiente comportamiento cualitativo:

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \dot{x} &= -y + xr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \\ \dot{y} &= x + yr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \end{cases}$$



Mas precisamente, existe una sucesión de círculos concéntricos centrados en $(0,0)$ con radio $\frac{1}{n}$ tales que las órbitas se espiralan alternativamente acercándose y alejándose de cada uno de ellos en el sentido positivo. En consecuencia, el origen es un punto de equilibrio estable. (Sug: trabajar en coordenadas polares)

5. Discutir la estabilidad de los puntos críticos para la ecuación del péndulo simple amortiguado:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda \sin x = 0 \qquad x \in \mathrm{R},\ \alpha > 0,\ \lambda = \frac{g}{l} > 0.$$

Usar Matlab para esbozar el diagrama de fases.

6. Consideremos el siguiente modelo para especies en competencia, en el que se asume que la interacción entre las especies es desfavorable para ambas. Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - x^2 - axy, \quad x \geq 0 \\ \dot{y} & = & y - y^2 - axy, \quad y \geq 0 \end{array}$$

dónde a es una constante positiva.

   (a) Determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema.

   (b) Mostrar que el dominio $x \geq 0,\ y \geq 0$ es invariante.

   (c) Esbozar el diagrama de fases para $0 < a < 1$, $a = 1$ y $a > 1$ usando Matlab.

   (d) Determine las condiciones de extinción (cuando $t \to \infty$) de una de las especies, de las dos especies y coexistencia de ambas especies.

7. Consideremos el siguiente sistema tridimensional:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (1-z)[(4-z^2)(x^2+y^2-2x+y) - 4(-2x+y) - 4] \\ \dot{y} & = & (1-z)[(4-z^2)(xy-x-zy) - 4(-x-zy) - 2z] \\ \dot{z} & = & z^2(4-z^2)(x^2+y^2) \end{array}$$

Determinar la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

8. Extendamos el modelo del ejercicio 6 añadiendo una tercer especie que saca provecho de los encuentros y suponiendo que la segunda especie se beneficia de los encuentros con la primera. Las ecuaciones son, para $x, y, z \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - a_1x^2 - a_2xy - a_3xz \\ \dot{y} & = & y - b_1y^2 + b_2xy - b_3yz \\ \dot{z} & = & z - c_1z^2 + c_2xz + c_3yz \end{array}$$

donde los coeficientes a_i, b_i, c_i son positivos. Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

9. Consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 1 + y - x^2 - y^2 \\ \dot{y} & = & 1 - x - x^2 - y^2 \end{array}$$

   (a) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(b) Probar que existe una solución periódica.

(c) Esbozar el diagrama de fases usando Matlab.

10. Encontrar todos los puntos de equilibrio y determinar la estabilidad del origen en las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a) } \frac{du}{dt} = u(u^2-1)(u^2-4) \quad \text{(b) } \frac{du}{dt} = u^2(u^2-1)(u^2-4)$$

$$\text{(c) } \frac{du}{dt} = -\sin u \qquad \text{(d) } \frac{du}{dt} = -\sin^2 u$$

11. Determinar el tipo de equilibrio del origen en los siguientes sistemas:

$$\text{(a) } \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -x - \frac{1}{3}x^3 - 2\sin y \\ \dot{y} & = & -y - \frac{1}{3}y^3 \end{array} \right. \qquad \text{(b) } \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -x + 3y + xy \\ \dot{y} & = & x + y + x^4 \end{array} \right.$$

12. La ecuación de Lienard

$$\text{(L) } \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y - f(x) \\ \dot{y} & = & -x \end{array} \right. \qquad \text{con } f \in C^1(\mathrm{R}, \mathrm{R})$$

(o equivalentemente, $\ddot{x} + f'(x)\dot{x} + x = 0$) juega un importante rol en la teoría de circuitos eléctricos. (Como caso especial, uno obtiene la ecuación de Van der Pol si $f(x) = x^3 - x$).

(a) Si se tiene que $f'(0) \neq 0$, determinar la estabilidad de los puntos estacionarios de (L) en función de $f'(0)$.

(b) Si se tiene que $xf(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, mostrar que el origen $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable. (Sug: puede ser útil saber que $x^2 + y^2$ puede interpretarse como la energía).

13. Analizar la estabilidad en el origen en:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 & = & x_1x_2 - x_3^3 \end{array} \right.$$

14. Analizar la estabilidad del origen en los siguientes campos y en la parte lineal de cada uno de ellos. Comparar.

$$\text{(a) } \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -y + x^3 \\ \dot{y} & = & x + y^3 \end{array} \right. \qquad \text{(b) } \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & 2y^3 \\ \dot{y} & = & -x \end{array} \right.$$

15. Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dada por

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^3 \sin^2(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right.$$

(a) Hallar los puntos de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Verificar que 0 es estable pero *no* asintóticamente estable.

(b) Probar que no existe una función de Liapunov V definida positiva en un entorno de 0 con $\dot{V}$ semidefinida negativa (es decir, no vale el recíproco del Teorema de Liapunov).

16. Consideremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + f(x,y) \\ \dot{y} &= \sin x \end{aligned}$$

donde $f(0,0) = 0$ y $xf(x,y) \leq 0$. Pruebe que $(0,0)$ es estable.

17. Determinar la estabilidad de la solución $(x, \dot{x}) = (0,0)$ de $\ddot{x} + x^n = 0$.

18. Considere el sistema

$$\dot{x} = 2y(z-1), \qquad \dot{y} = -x(z-1), \qquad \dot{z} = xy.$$

(a) Mostrar que la solución $(0,0,0)$ es estable.

(b) Es esta solución asintóticamente estable?

19. Determinar la estabilidad del origen para los sistemas:

$$\text{(a)} \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& 2xy + x^3 \\ \dot{y} &=& x^2 - y^5 \end{array} \qquad \text{(b)} \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& xy^2 - \frac{1}{2}x^3 \\ \dot{y} &=& -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5}x^2 y \end{array}$$