ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
Primer Cuatrimestre 2003

Práctica 5
Conjuntos límite - Órbitas periódicas - Sistemas conservativos

1. Determinar el ω-límite y el α-límite de los puntos del plano para los flujos del ejercicio 6 de la práctica 3.

2. Determinar el ω-límite y el α-límite de los puntos del plano para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \\ \dot{y} = x + y\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

3. Escribir el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-r^2)(4-r^2) \\ \dot{y} = x + y(1-r^2)(4-r^2) \end{cases} \qquad \left(r^2 = x^2+y^2\right)$$

en coordenadas polares. Dibujar el diagrama de fases y determinar los conjuntos límite de las trayectorias del sistema. Mostrar que este sistema tiene dos ciclos límite Γ_1 y Γ_2. Hallar Γ_1 y Γ_2 y determinar su estabilidad.

4. Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2-z^2)(4-x^2-y^2-z^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2-z^2)(4-x^2-y^2-z^2) \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

Mostrar que el sistema tiene dos esferas invariantes y que cada plano $z = z_0$ es un conjunto invariante. (Sug. Fijar $z = z_0$ y escribir el sistema en coordenadas polares). Dibujar el diagrama de fases y determinar el conjunto límite de todas las trayectorias.

5. Sea $\Omega \subset \mathrm{R}^2$ abierto. Dada $f \in C^1\left(\Omega, \mathrm{R}^2\right)$, se considera el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$.

   (a) Probar que si Ω es simplemente conexo y si $div\, f \neq 0$ en todo Ω, entonces el sistema no tiene órbitas periódicas.

   (b) Probar que si Ω es doblemente conexo (es decir, su complemento tiene dos componentes conexas) y si $div\,(gf) \neq 0$ en todo Ω, para alguna $g \in C^1(\Omega, \mathrm{R})$, entonces el sistema tiene a lo sumo una órbita periódica.

6. Dada $g \in C^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ se considera el sistema autónomo $\dot{x} = \nabla g(x)$. Probar que no tiene órbitas periódicas.

7. Sea f de clase C^2 y p un punto α-limite u ω-limite de una orbita de la ecuación $\dot{x} = -\nabla f$, probar que p es un equilibrio. (Sug: ver que f es constante en $\omega(x)$ y en $\alpha(x)$). Esto prueba el ejercicio anterior.

8. Considerar el sistema
$$\begin{cases} x' = v, \\ \\ v' = -\nabla f. \end{cases}$$
Probar que $(x_0, 0)$ es una singularidad estable si y sólo si x_0 es un mínimo local estricto de f.

9. Sea $F = \nabla f$, probar que si p es una singularidad de F entonces los autovalores de $DF(p)$ son reales.

10. Si $F = \nabla f$, probar que p es un punto de equilibrio hiperbólico para F si y sólo si $\nabla f(p) = 0$ y $Hf(p)$ es una forma cuadrática no-degenerada.

11. Considerar las soluciones de $x' = (1-x)x^{1/2}$ para $x > 0$. ¿Cuál es el α-límite de una solución?. Se alcanza en tiempo finito?.

12. Comparar la velocidad a la que se aproximan a cero las soluciones de $x' = -x$ e $y' = -y^3$. Concluir que los hiperbólicos son mas rápidos que los que no.

    Definición: Un conjunto cerrado $A \subset E$ se dice un conjunto atrayente si existe un entorno U de A tal que para todo $x \in A$, $\phi_t(x) \in U$ para todo $t \geq 0$ y $\phi_t(x) \to A$ cuando $t \to \infty$. Si además contiene una órbita densa, se dice atractor.

13. Hallar conjuntos atrayentes en el siguiente sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \\ \dot{z} = \alpha, \qquad \alpha > 0 \end{cases}$$
    Son atractores?

    Idem para

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2 - z^2) \\ \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2 - z^2) \\ \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

14. Esbozar el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Mostrar que el intervalo $[-1, 1]$ en el eje x es un conjunto atrayente. ¿Es un atractor? ¿Es el intervalo $(0, 1]$ un atractor?

¿Es alguno de los intervalos $(0, \infty), [0, \infty), (-1, \infty), [-1, \infty)$ o $(-\infty, \infty)$ en el eje x un conjunto atrayente para este sistema?

15. Considerar el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \\ \dot{z} = xy - \beta z, \qquad \sigma, \rho, \beta > 0 \end{cases}$$

(a) Mostrar que el sistema es invariante bajo la transformación $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$.

(b) Mostrar que el eje z es un conjunto invariante y que consiste de tres trayectorias.

(c) Mostrar que tiene puntos de equilibrio en el origen y en $(\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ para $\rho > 1$. Mostrar también (para $\rho > 1$) que hay una variedad inestable de dimensión 1 en el origen.

(d) Para $\rho \in (0, 1)$ mostrar que el origen es globalmente estable; i.e., el origen es el ω-límite de todas las trayectorias del sistema.

16. Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xz^2 \\ \\ \dot{y} = x + yz^2 \\ \\ \dot{z} = -z(x^2 + y^2) \end{cases}$$

tiene una órbita periódica $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$. Estudiar la estabilidad de $\gamma(t)$.

17. Sea Γ_0 una órbita periódica de un sistema dinámico C^1 en un abierto $E \subset \mathrm{R}^2$, con $\Gamma_0 \subset E$. Sea T_0 el período de Γ_0 y supongamos que existe una sucesión de órbitas $\Gamma_n \subset E$ de períodos T_n, conteniendo puntos x_n que tienden a x_0. Probar que $T_n \to T_0$.

    Este resultado no es cierto en dimensiones mayores, esbozar un contraejemplo en R^3.

18. Considerar la ecuación

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

    Donde

    (a) $F, g \in C^1(\mathrm{R})$.
    (b) F y g son funciones impares.
    (c) $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.
    (d) $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$.
    (e) F tiene un único cero positivo en $x = a > 0$.
    (f) F es creciente para $x > a$ y $F(x) \to +\infty$ cuando $x \to \infty$.

    Entonces la ecuación tiene una única órbita periódica Γ que es estable. Más aún, todas las trayectorias (excepto el origen) tienden a Γ.

19. (Dificil) Considerar la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(y - (x^3 - x)), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned}$$

    por el ejercicio anterior tiene una única órbita periódica Γ_μ. Probar que cuando $\mu \to \infty$, Γ_μ tiende a una curva cerrada Γ formada por dos segmentos horizontales y dos arcos sobre la curva $y = x^3 - x$.

20. (Muy dificil) Considerar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - f(x), \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

    Donde $f \in C^1(\mathrm{R})$. Dada f, ¿cuántas órbitas periódicas tiene este sistema? Por ejemplo, si f es como la F del problema anterior entonces tiene una sola. Dar clases de funciones para las cuales se pueda determinar la cantidad de órbitas periódicas. Este es un problema abierto (pero es posible dar resultados parciales!).

21. Sea $U(x) = (x-1)^2(x+2)^2$. Esbozar el diagrama de fases del sistema Hamiltoniano asociado al Hamiltoniano $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$.

22. Esbozar el diagrama de fases del sistema

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

donde $H(x, y)$ es como en el ejercicio anterior.

23. Probar que el flujo definido por un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad preserva área. Es decir, para todo abierto $U \subset E$, $|\Phi_t(U)| = |U|$.