**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 6**
**Primer Cuatrimestre 2003**

**El Teorema de Poincaré Bendixson**

Nota: En los ejercicios 1, 2 y 3 *no* usar el Teorema de Poincaré Bendixson.

1. Sea $A \subset \mathrm{R}^2$ el anillo $A = \{z \in \mathrm{R}^2 \,/\, 1 \leq |z| \leq 2\}$. Sea $f$ un campo $C^1$ en un entorno de $A$, que apunta hacia adentro de $A$ en los bordes. Si cada segmento radial es una sección local, probar que hay una trayectoria periódica en $A$.

2. Probar que una órbita cerrada de un sistema dinámico $C^1$ planar, corta una sección local en, a lo sumo, un punto.

3. Sea $x$ un punto recurrente de un sistema dinámico $C^1$ planar, es decir, $\exists\, t_n \to \infty$ tal que $\varphi(t_n, x) \to x$, cuando $n \to \infty$. Probar que $x$ es periódico.

4. Sea $A$ una región como la del ejercicio 1. Sea $f$ un campo $C^1$ en un entorno de $A$, que apunta hacia adentro de $A$ en los bordes. Supongamos que $f$ no tiene ceros en $A$.
   (a) Probar que hay una órbita cerrada.
   (b) Si hay un número finito de órbitas cerradas, mostrar que al menos una de ellas tiene órbitas que se espiralan hacia ella de ambos lados (es decir, es un ciclo límite estable).

5. Sea $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $C^1$ y sin ceros. Mostrar que toda órbita es un conjunto cerrado.

6. Probar que la ecuación $\ddot{x} = \dot{x}^2 + (1 + x^2)$ no tiene órbitas periódicas.

7. Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x + (x^2 + 2y^2)x \\ \dot{y} = x - y + (x^2 + 2y^2)y \end{cases}$$

   tiene exactamente una órbita periódica.