Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer parcial
25 de mayo de 2005

---

1. Sean $f_n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones globalmente Lipschitz tales que $f_n \to f$ uniformemente y sean $x_n, x_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_n \to x_0$. Sean $u_n(t)$ y $u(t)$ las soluciones de
$$\begin{cases} \dot{x} = f_n(x) \\ x(0) = x_n \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
respectivamente.
   a) Probar que $u_n \to u$ uniformemente sobre compactos.
   b) Si $f_n(x_n) = 0$ y $x_n$ es (asintóticamente) estable para $f_n$, ¿es $x_0$ (asintóticamente) estable para $f$?
2. Considerar el sistema
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{1}{1+x_n} + \alpha_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha_2 x_2, \\ & \vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} + \alpha_n x_n. \end{cases}$$
Donde $\alpha_i > 0,\ 1 \leq i \leq n$. Hallar los equilibrios y estudiar su estabilidad.
3. Sea $\Phi(t)$ una matriz de $n \times n$ de funciones $C^1$. Supongamos que $\Phi(0) = Id$ y $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Probar que existe $A$ tal que $\Phi(t) = e^{tA}$.
4. a) Sea $A(t)$ una matriz de $n \times n$ de funciones continuas en un intervalo de $\mathbb{R}$. Si para todo $t$
$$\Big[\int_{t_0}^{t} A(s)ds\Big] A(t) = A(t) \Big[\int_{t_0}^{t} A(s)ds\Big] \tag{1}$$
entonces $\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$ es una matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$.
   b) Probar que si $A(\cdot)$ verifica $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ para todo $t, s > 0$, entonces $A$ satisface (1).
5. Considerar el sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = -xy + x^3 - 4x \\ \dot{y} = -y^2 + x^2 y - y \end{cases}$$
   a) Verificar que $\mathbb{R}^2_+$ es positivamente invariante.
   b) Hallar todos los equilibrios en $\mathbb{R}^2_+$ y estudiar su estabilidad.
   c) Probar que $t^+(x, y) = +\infty$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.
   d) Hallar un conjunto compacto, conexo de interior no vacío que no es un rectángulo, positivamente invariante.

---

Por favor: escriban prolijo :-)