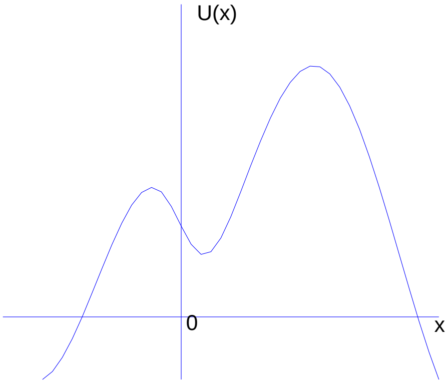
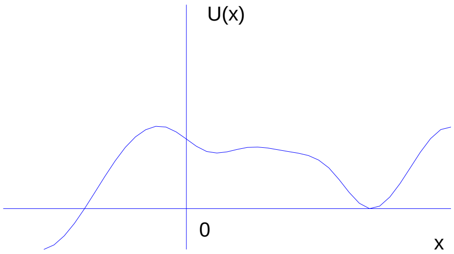
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 1
Primer Cuatrimestre 2004

1. Sea $f = U'$, donde $U \in C^2((\alpha,\beta),\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación diferencial
$$-\ddot{x} = f(x).$$
   a) Hacer el bosquejo del diagrama de fases de los siguientes potenciales,
   (i)$U(x) = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{a}{x^2}$ con $x > 0,\ a > 0.$
   (ii)



   (iii)



   b) Probar que el punto critico $(x_0, 0)$ es una silla si es un maximo local estricto de la función $U(x)$ y es un centro si es un minimo local estricto de $U(x)$.
2. Considerar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central, ésto es, se considera la ecución
$$-m\ddot{x} = \nabla U(x) \quad x \in \mathbb{R}^3/\{0\}$$
donde $U(x) = U_0(|x|)$ con $U_0 \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$.
   a) Probar que se conserva el momento angular, M, relativo al origen. Donde $M = x \times m\dot{x}$ (producto vectorial).
   b) Mostrar que todas las órbitas son planares (en el plano perpendicular a M).
   c) Probar la ley de Kepler, que dice que el radiovector barre áreas iguales en tiempos iguales.
   (Sug: Usar la formula de Green $\int_{\triangle} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial\triangle} xdy - ydx$ para calcular el área del triángulo curvo).
3. Se lanza hacia arriba un cuerpo de masa m con una velocidad inicial v_0. Sabiendo que la fuerza gravitatoria ($F = -mg$) es conservativa.

   a) Hallar la energía potencial y cinética del cuerpo cuando alcanza una altura h.
   b) Graficar el potencial y encontrar el valor de h donde el movimeiento cambia de dirección.

4. Supongamos un cuerpo unido de un resorte (ideal) apoyado sobre una superficie sin rozamiento. Se lleva el cuerpo hasta una distancia x_0 a la izquierda de la posición de equilibrio y se lo suelta. sabiendo que la fuerza de un resorte ideal se expresa $F = -k(x - x_{eq})$ con k constante del resorte.
   a) Hallar la energía potencial, cinética y mecánica.
   b) Graficar el potencial.
   c) Hacer un bosquejo del diagrama de fases.

5. Esbozar el plano de fases de la ecuación $x' = Ax$, sin resolver para,
$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Considerar el sistema a un parámetro,
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \lambda y \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Determinar todas las soluciones y hacer un bosquejo del diagrama de fases para $\lambda = -1, 0, 1, 2$.

7. Para cada una de las siguientes matrices A, esbozar el campo vectorial $x \to Ax$ en $\mathbb{R}^3$,
$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Sea A una matiz diagonal de $n \times n$. Encontrar condiciones sobre A que garanticen que:
$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$
para todas las soluciones de $\dot{x} = Ax$.

9. Sea A una matriz de $n \times n$.
   a) ¿Cuál es la relación entre los campos $x \to Ax$ y $x \to (-A)x$?
   b) ¿Cuál es la relación geométrica entre la solución de $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = -Ax$?

10. Determinar todas las soluciones del sistema
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
y hacer un bosquejo del diagrama de fases.
Sug: introducir nuevas incógnitas (u, v) mediante el cambio de variables
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
¿Por qué se introduce este cambio de variables? ¿Qué información me da respecto del sistema original? Comparar el diagrama de fases en las coordenadas (x, y) y en las coordenadas (u, v).