ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 2
Primer Cuatrimestre 2005
Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Considerar la ecuación del péndulo simple
$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}x.$$
   a) Utilizar el comando `contour` para esbozar las curvas de nivel de la energía y `quiver` para esbozar el campo de fuerzas[1].
   b) Usar `ode45` para calcular aproximaciones de las soluciones para diferentes datos iniciales y `plot` para dibujarlas (también pueden probar con el comando `comet`. Comparar con el ítem anterior.

2. Repetir el Ejercicio para el siguiente modelo depredador-presa
$$\dot{x} = (2-y)x,$$
$$\dot{y} = (x-1)y.$$
   Comparar con lo probado en la teórica.
3. Ídem para la ecuación
$$-\ddot{x} = \nabla U(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad U(x) = \frac{1}{|x|}.$$
4. Ídem para el ejercicio 4 de la práctica 1.
   Comparar con lo probado en la Práctica 1.

5. Considerar la ecuación
$$\dot{x} = x^2 - x.$$
   a) Utilizar `mieuler.m` [2] para calcular una aproximación de la solución con condición inicial $x(0) = 0{,}2$, utilizando $h = \Delta t = 0,1$ y $N = 10$ pasos. El programa generará una lista de pares ordenados (t_i, x_i). Utilizar `plot` para graficar la solución lineal a trozos que conecta los puntos (x_i, y_i)
   b) Repetir para $x(0) = 2$. Determinar h y N adecuados para poder predecir el comportamiento de la solución. ¿Qué se observa? ¿Está definida globalmente? ¿cuál es el intervalo maximal de existencia? ¿Coinciden los resultados numéricos con los analíticos?

6. Considerar la ecuación
$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x), \qquad f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \\ &x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{1}$$
   Llamemos $u(t, x_0)$ al valor que toma la solución con dato inicial x_0 a tiempo t. Probar que para los métodos de Euler explícito e implícito vale
$$x_{n+1} = u(\Delta t, x_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

[1] Los ítems (a) y (b) de este ejercicio están hechos en el script `introodes.m` que se puede bajar de la pagina de la materia
[2] Bajarlo de la página de la materia

¿Qué hipótesis de regularidad hacen falta sobre f?

7. Considerar un método numérico para (1) de la forma

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n) + \Delta t^2 Q(x_n).$$

Elegir $Q(x)$ de forma tal que

$$x_{n+1} - u(\Delta t, x_n) = \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$.

8. Considerar el siguiente método de Runge-Kutta para (1)

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n + \frac{\Delta t}{2} f(x_n)).$$

a) Hallar el error local para este método.

b) Implementarlo en MATLAB para calcular aproximaciones de las soluciones de

$$\dot{x} = x - x^2. \tag{2}$$

c) Esbozar (analíticamente) el Diagrama de fases de la ecuación (2).

d) Utilizar el método implementado para calcular aproximaciones de (2) para diferentes valores de Δt y $x(0)$. Usar `plot` para graficarlas. ¿Coincide el comportamiento mostrado por las aproximaciones numéricas con lo predecido analíticamente? ¿Qué ocurre para valores grandes de $x(0)$? Sugerencia: Probar, por ejemplo, con $\Delta t = 0{,}1, x(0) \geq 40$.

e) Utilizar el comando `roots` para hallar los puntos de equilibrio del método numérico para diferentes valores de Δt. Comparar con los equilibrios de (2).