ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 4
Primer Cuatrimestre 2005

Sistemas Lineales

SUGERENCIA: Usar MATLAB para todo lo que crean necesario: dibujar campos, trayectorias, calcular autovalores, autovectores, etc.

1. *a*) Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas. En ii., iv. y v. resolver además el problema de valores iniciales.

$$\text{i.}\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \qquad \text{ii.}\begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\text{iii.}\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \qquad \text{iv.}\begin{cases} \dot{x} = -2y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{v.}\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = -x + y & y(0) = 1 \end{cases}$$

   b) ¿Cuáles son las soluciones $(x(t), y(t))$ que verifican

$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = 0?$$

   ¿Cuáles verifican

$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = \infty?$$

   c) Esbozar los diagramas de fases.

2. Sea A una matriz de 2×2 con autovalores reales λ y μ asociados respectivamente a los autovectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Esbozar el diagrama de fases de $x' = Ax$ si
   a) $0 < \lambda < \mu$
   b) $\lambda < 0 < \mu$
   c) $\lambda = 0, \mu < 0$
   d) $\lambda < \mu < 0$

3. Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + bx' + cx = 0 \quad \text{con } b, c \text{ constantes} \tag{1}$$

   a) Examinando el sistema de primer orden equivalente probar que (1) tiene una única solución para toda condición inicial $x(0) = u$, $x'(0) = v$.
   b) ¿Qué hipótesis sobre b y c asegura que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ para toda solución $x(t)$?

4. *a*) Graficar el diagrama de fases de un sistema bidimensional

$$x' = Ax \quad A \in \mathrm{R}^{2\times 2}$$

   y encontrar la solución general, en los siguientes casos:
   1) A tiene autovalores reales de distinto signo
   2) A tiene dos autovalores reales negativos (A a diagonalizable)
   3) A tiene un autovalor negativo pero no es diagonalizable
   4) A tiene autovalores complejos conjugados $a \pm bi$ con $a < 0$
   5) Idem (iv) con $a = 0$
   6) Idem (iv) con $a > 0$
   7) Idem (ii) con autovalores positivos
   8) Idem (iii) con autovalor positivo

   b) ¿En cuáles de los items anteriores se verifica $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ con cualquier condición inicial? ¿En cuáles se verifica $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \infty$?

5. *a*) Resolver la ecuación diferencial en R^3 $x' = Ax$ en los siguientes casos:

i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ii. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $x(0) = (1, 2, 1)$

iii. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ iv. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x(0) = (2, 1, 1)$

b) Analizar el comportamiento asintótico de las soluciones.

6. Probar que una matriz es nilpotente si y sólo si todos sus autovalores son nulos.

Def.: Una matriz $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ se dice *semisimple* si es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

7. Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real no positiva.
   a) Si A a es semisimple, probar que toda solución de $x' = Ax$ se mantiene acotada cuando $t \to +\infty$.
   b) ¿Qué sucede si A no es semisimple?
8. Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y supongamos que todas las soluciones de $x' = Ax$ son periódicas del mismo período. Entonces A es semisimple y el polinomio característico es una potencia de $t^2 + a^2$ con $a \in \mathrm{R}$.
9. Encontrar todas las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}$$

10. Encontrar la solución de

$$\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

   a) que verifique $x(1) = 2 \quad y(1) = 7$
   b) que verifique $x(1) = 0 \quad y(1) = 0$
11. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:
   a) $y'' - 8y' + 16y = 0$
   b) $y'' - 2y' + 10y = 0$
   c) $y'' - y' - 2y = 0$
12. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones
   a) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2$
   b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{2t}$
   c) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^t \cos 2t$
13. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = \exp(-x)$ que verifiquen:
   a) $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$
   b) $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$
   c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$
   d) $y'(0) = 1$

14. Hallar los subespacios estables, inestables y centrales (E^s, E^u y E^c) del sistema lineal

$$x' = Ax \tag{2}$$

para las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En cada caso, también esbozar el diagrama de fases. ¿Cuáles de estas matrices define un flujo hiperbólico, e^{At}?

15. Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $x(t)$ la solución de (2) con $x(0) = x_0$. Muestre que
   a) si $x_0 \in E^s - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to-\infty} |x(t)| = \infty$;
   b) si $x_0 \in E^u - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$;
   c) si $x_0 \in E^c - \{0\}$ y A es semisimple, entonces existen constantes positivas m y M tales que, para todo $t \in \mathrm{R}$, $m \le |x(t)| \le M$.
16. Muestre que las únicas líneas invariantes para el sistema lineal (2) con $x \in \mathrm{R}^2$ son las líneas $ax + by = 0$ donde $v = (-b, a)$ es un autovector de A.
17. Utilice el método de variación de las constantes para hallar la solución general del sistema

$$x' = Ax + b(t) \tag{3}$$

donde $b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ es continuo.

18. Resuelva el sistema no homogéneo (3) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

y condición inicial $x(0) = (1, 0)$.

19. Pruebe el siguiente Teorema:
   Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $B(t) \in \mathrm{R}^{n\times n}$ continua para $t \ge t_0$.
   Probar que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa y que si $\|B(t)\| \to 0$ $(t \to \infty)$, entonces las soluciones de

$$x' = Ax + B(t)x \tag{4}$$

verifican $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ (y luego, 0 es asintóticamente estable).

20. Determine la estabilidad de $x = 0$ para el sistema (4) si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 & 0 \\ te^{-t^2} & t^2e^{-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

21. Para qué valores de a es la solución $x = 0$ asintóticamente estable o inestable (ignore los casos con autovalores de parte real cero) para el siguiente sistema

$$x' = A(t)x$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1+e^{-t} \\ (2-a)\frac{1-t}{t} & -1 & a\frac{1-t}{t} \end{pmatrix}.$$