ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 5
Primer Cuatrimestre 2005

Estabilidad de los equilibrios - Invarianza

1. Analizar la estabilidad del origen en los siguientes campos y en la parte lineal de cada uno de ellos. Comparar.

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} &= -y + x^3 \\ \dot{y} &= x + y^3 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} &= 2y^3 \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

2. Mostrar que el diagrama de flujo del sistema lineal perturbado (P), donde $r^2 = x^2 + y^2$, tiene el siguiente comportamiento cualitativo: existe una sucesión de círculos concéntricos centrados en $(0,0)$ con radio $\frac{1}{n}$ tales que las órbitas se espiralan alternativamente acercándose y alejándose de cada uno de ellos en el sentido positivo. En consecuencia, el origen es un punto de equilibrio estable.

$$\text{(P)} \begin{cases} \dot{x} &= -y + xr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \\ \dot{y} &= x + yr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \end{cases}$$

3. Discutir la estabilidad de los puntos críticos para la ecuación del péndulo simple amortiguado:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda \sin x = 0 \qquad x \in \mathrm{R},\ \alpha > 0,\ \lambda = \frac{g}{l} > 0.$$

4. Considerar la ecuación $\dot{x} = f(x)$ y sea ϕ el flujo asociado. Un conjunto $M \subset Dom\ f$ se dice positivamente invariante para ϕ si $\phi(M,t) \subset M$ para todo $t \geq 0$.

   (a) Probar que si M es positivamente invarante entonces $\overline{M}$ también.

   (b) Un conjunto cerrado M es positivamente invariante sii $\forall x \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi(x,t) \in M$ $\forall t \in [0,\epsilon)$.

   (c) M es positivamente invariante sii M^c es negativamente invariante.

(d) M es positivamente invariante entonces $int(M)$ también.

(e) Si M es invariante entonces ∂M también.

(f) Si M es invariante y div $f > 0$ en M entonces $|M| = 0$.

5. Consideremos el siguiente modelo para especies en competencia, en el que se asume que la interacción entre las especies es desfavorable para ambas. Tenemos:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x,y)x \\ \dot{y} &= b(x,y)y \end{aligned}$$
dónde x e y son las poblaciones de las dos especies y $a, b \in C^1(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$ son las tasas de crecimeiento. Es razonable suponer:

   (a) Si una población aumenta, la tasa de crecimeinto de la otra decrece, o sea $\frac{\partial a}{\partial y} < 0$ y $\frac{\partial b}{\partial x} < 0$.

   (b) Si una población es demasiado grande, no puede seguir creciendo, es decir, existen constantes A y B positivas tal que $a(x,y) \le 0$ y $b(x,y) \le 0$ si $x \ge A$ e $y \ge B$.

   (c) Si alguna de las especies está ausente, la otra tiene tasa de crecimento positiva hasta un punto y luego negativa, esto es, existen $\alpha, \beta > 0$ tal que,
$$\begin{array}{ll} a(x,0)(\alpha - x) > 0 & \forall x \in \mathrm{R}_+ - \{\alpha\} \\ b(0,y)(\beta - y) > 0 & \forall y \in \mathrm{R}_+ - \{\beta\} \end{array} .$$

   (a) Encontrar los conjuntos invariantes.

   (b) ¿ Qué puntos resultan asintóticamente estables?

6. Sea
$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= ax_1 - bx_1x_2, \quad x_1(0) = \xi_1 \ge 0 \\ \dot{x_2} &= dx_2 - ex_1x_2 \quad x_2(0) = \xi_2 \ge 0 \end{aligned}$$

   (a) Encontrar los puntos de equilibrio.

   (b) Demostrar que
$$G_1 = \left\{ (x_1, x_2)/\ 0 < x_1 < \frac{d}{e},\ x_2 > \frac{a}{b} \right\}$$

y

$$G_2 = \left\{ (x_1, x_2)/\ 0 < x_2 < \frac{a}{b},\ x_1 > \frac{d}{e} \right\},$$

son conjuntos positivamente invariantes.

(c) Dibujar aproximadamente el diagrama de fases.

7. Considerar el siguiente sistema tridimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1-z)[(4-z^2)(x^2+y^2-2x+y)-4(-2x+y)-4] \\ \dot{y} &= (1-z)[(4-z^2)(xy-x-zy)-4(-x-zy)-2z] \\ \dot{z} &= z^2(4-z^2)(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Determinar la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

8. Extendamos el modelo del ejercicio 5 añadiendo una tercer especie que saca provecho de los encuentros y suponiendo que la segunda especie se beneficia de los encuentros con la primera. Las ecuaciones son, para $x, y, z \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - a_1x^2 - a_2xy - a_3xz \\ \dot{y} &= y - b_1y^2 + b_2xy - b_3yz \\ \dot{z} &= z - c_1z^2 + c_2xz + c_3yz \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_i, b_i, c_i son positivos. Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

9. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + y - x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 1 - x - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

(a) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(b) Probar (pasando a coordenadas polares) que existe una solución periódica.

10. Analizar la estabilidad en el origen en:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3 \end{aligned} \right.$$

11. Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2 - z^2)(4 - x^2 - y^2 - z^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2 - z^2)(4 - x^2 - y^2 - z^2) \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

Mostrar que el sistema tiene dos esferas invariantes y que cada plano $z = z_0$ es un conjunto invariante. (Sug. Fijar $z = z_0$ y escribir el sistema en coordenadas polares). Dibujar el diagrama de fases y determinar el conjunto límite de todas las trayectorias.