ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 6
Primer Cuatrimestre 2005

Conjuntos límite - Funciones de Liapunov

1. Determinar el ω-límite y el α-límite de los puntos del plano para los flujos de los ejercicios 2 y 3 de la práctica 5, es decir

$$(a)\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & -y + xr^2\sin(\frac{\pi}{r})\\ \dot{y} & = & x + yr^2\sin(\frac{\pi}{r})\end{array}\right.$$

$$(b)\quad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda\sin x = 0 \qquad x\in\mathbb{R},\ \alpha>0,\ \lambda=\frac{g}{l}>0.$$

2. Escribir el sistema

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = -y + x(1-r^2)(4-r^2)\\ \dot{y} = x + y(1-r^2)(4-r^2)\end{array}\right. \qquad \left(r^2 = x^2+y^2\right)$$

en coordenadas polares. Dibujar el diagrama de fases y determinar los conjuntos límite de las trayectorias del sistema. Mostrar que este sistema tiene dos ciclos límite Γ_1 y Γ_2. Hallar Γ_1 y Γ_2 y determinar su estabilidad.

3. Sea φ un semiflujo, si $\{x_0\}$ es estable, entonces x_0 es un punto crítico.

4. Verificar que el dominio de atracción del origen en el sistema

$$\begin{array}{l}\dot{x} = 3x + y\\ \dot{y} = y\end{array}$$

es un conjunto cerrado. ¿Contradice esto el reslutado de la teórica?

5. Sea x_0 un pozo (punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro), y sea y_0 un punto en la frontera de la cuenca C de atracción de x_0. Probar que

   a) $y_0 \notin C$

   b) y_0 no es estable en el futuro.

6. Probar que si x_0 es asintóticamente estable en el futuro (localmente) y todo punto del espacio $\mathbb{R}^n$ es estable en el futuro, entonces x_0 es globalmente asintóticamente estable.

Def: Un punto de equilibrio x_0 es uniformemente asintóticamente estable (en el futuro), si es asintóticamente estable y además existe $\rho > 0$ tal que $\varphi(x,t)$ converge uniformemente a x_0 cuando $t\to+\infty$, para todo $x\in B_\rho(x_0)$. Esto es, $\forall\epsilon>0$ existe $T>0$ tal que $\|\varphi(x,t)-x_0\|<\epsilon$ $\forall t>T,\ \forall x\in B_\rho(x_0)$.

7. Si x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable en un sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ entonces es uniformemente asintóticamente estable.

8. *Ecuaciones de Lorenz.* Usar MATLAB para graficar soluciones del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned}$$

Para (por ejemplo) $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ y $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 10, 10)$. (Sugerencia: Usar los comandos `plot3, comet3` y graficar para tiempos largos) ¿Qué puede conjeturar del $\omega-$límite? [1].

9. Probar que si existe $V(x)$ con $\dot{V} \leq 0$ en $|x| \geq R$ y tal que $V(x) \to +\infty$ cuando $|x| \to \infty$, entonces todas las trayectorias están acotadas. Deducir que ésto sucede para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= x + y - y(y^2 - 2). \end{aligned}$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin^2(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   a) Hallar los puntos de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Verificar que 0 es estable pero *no* asintóticamente estable.

   b) Probar que no existe una función de Liapunov V definida positiva en un entorno de 0 con $\dot{V}$ semidefinida negativa (es decir, no vale el recíproco del Teorema de Liapunov).

11. Determinar el tipo de equilibrio del origen en los siguientes sistemas:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} &=& -x - \frac{1}{3}x^3 - 2\sin y \\ \dot{y} &=& -y - \frac{1}{3}y^3 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} &=& -x + 3y + xy \\ \dot{y} &=& x + y + x^4 \end{array} \right.$$

12. La ecuación de Lienard

$$\text{(L)} \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} &=& y - f(x) \\ \dot{y} &=& -x \end{array} \right. \qquad \text{con } f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

[1] Estas ecuaciones tienen un atractor, conocido como el atractor de Lorenz, quien descubrió accidentalmente el comportamiento caótico del sistema cuando estudiaba una versión simplificada de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para describir un fluido bidimensional bajo condiciones específicas de temperatura, gravedad, difusión térmica, etc. El atractor de Lorenz tiene dimensión fractal (box) 2.06 $\pm$ 0.01. En http://www.apmaths.uwo.ca/ bfraser/nll/version1/lorenzintro.html pueden encontrar mas información y simulaciones.

(o equivalentemente, $\ddot{x} + f'(x)\dot{x} + x = 0$) juega un importante rol en la teoría de circuitos eléctricos. (Como caso especial, uno obtiene la ecuación de Van der Pol si $f(x) = \mu(x^3 - x)$, $\mu >> 1$).

a) Si se tiene que $f'(0) \neq 0$, determinar la estabilidad de los puntos estacionarios de (L) en función de $f'(0)$.

b) Si se tiene que $xf(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, mostrar que el origen $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable. (Sug: puede ser útil saber que $x^2 + y^2$ puede interpretarse como la energía).

c) Graficar usando MATLAB algunas soluciones de la ecuación de Van der Pol.

13. Consideremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + f(x,y) \\ \dot{y} &= \sin x \end{aligned}$$

donde $f(0,0) = 0$ y $xf(x,y) \leq 0$. Probar que $(0,0)$ es estable.

14. Determinar la estabilidad de la solución $(x, \dot{x}) = (0,0)$ de $\ddot{x} + x^n = 0$.

15. Considerar el sistema

$$\dot{x} = 2y(z-1), \qquad \dot{y} = -x(z-1), \qquad \dot{z} = xy.$$

a) Mostrar que la solución $(0,0,0)$ es estable.

b) ¿Es esta solución asintóticamente estable?

16. Determinar la estabilidad del origen para los sistemas:

$$\text{(a)} \quad \ddot{x} + \dot{x} + \sin(x) = 0 \qquad \text{(b)} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 2xy + x^3 \\ \dot{y} &= x^2 - y^5 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= xy^2 - \tfrac{1}{2}x^3 \\ \dot{y} &= -\tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{5}x^2 y. \end{aligned}$$

17. Sea $V \in C^1(D)$, con $0 \in D$, $\dot{V} \leq 0$ $V(0) = 0$. Sea $K > 0$ y H_K la componente conexa de $\{x \in D / V(x) \leq K\}$ que contiene al origen. Sea M_V el mayor subconjunto invariante de $\left\{x \in D / \dot{V}(x) = 0\right\}$. Si para algún K, H_K es acotada, entonces toda trayectoria que comienza en H_K se acerca a M_V cuando $t \to +\infty$. ¿Por qué se pide H_K acotada?

18. Hallar un conjunto contenido en el dominio de atracción del origen, para el sistema

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y - \epsilon\left(x - \tfrac{1}{3}x^3\right) \\ &\dot{y} = -x. \end{aligned}$$