ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 7
Primer Cuatrimestre 2005

El Teorema de la Variedad Estable

1. Escribir el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_2 + x_1 x - 2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + 3x_2 - x_1^2 \end{aligned}$$

en la forma

$$\dot{y} = By + G(y)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ y $G(y)$ es cuadrática en y_1 e y_2.

2. Encontrar los tres primeras aproximaciones sucesivas $u^{(1)}(t,a)$, $u^{(2)}(t,a)$ y $u^{(3)}(t,a)$ para

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

y usar $u^{(3)}(t,a)$ para aproximar S cerca del origen. Aproximar también la variedad inestable, U cerca del origen. Observar que $u^{(2)}(t,a) = u^{(3)}(t,a)$ y por lo tanto $u^{(j+1)}(t,a) = u^{(j)}(t,a)$ para $j \geq 2$.Entonces $u^{(j)}(t,a) \to u(t,a) = u^{(2)}(t,a)$ que da exactamente la función que define S.

3. Resolver el sistema del problema anterior, y mostrar que S y U están dadas por

$$S : x_2 = -\frac{x_1^2}{3}$$

y

$$U : x_1 = 0.$$

Esbozar S, U, E^s y E^u.

4. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

y probar que las aproximaciones sucesivas $\phi_k \to \phi$ y $\psi_k \to \psi$ cuando $k \to \infty$ para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Definir $H_0 = (\phi, \psi)^T$ y usar este homemorfismo para encontrar

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s \; ds.$$

Usar el homoemorfismo H para encontrar las variedades estables e inestables $W^s(0) = H^{-1}(E^s)$ y $W^u(0) = H^{-1}(E^u)$ para este sistema.

Ayuda: Tienen que obtener, $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3^2/3, x_3)^T$

$$W^s(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}$$

y

$$W^u(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0, \; x_2 = x_3^2/3\}.$$