ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 8
Primer Cuatrimestre 2005

Soluciones Periódicas - El Teorema de Poincaré-Bendixon

Nota: En los ejercicios 4, 5 y 6 **no** usar el Teorema de Poincaré Bendixson.

1. Considerar el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$

Probar que existen dos orbitas periódicas Γ_1, Γ_2 en el plano x, y y determinar su estabilidad. Mostrar que existen dos cilindros invariantes y describir las variedades $W^s(\Gamma_j)$ y $W^u(\Gamma_j)$ para $j = 1, 2$.

2. Mostrar que

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

es un sistema Hamiltoniano. Mostrar que el origen es una silla y que $(\pm 1, 0)$ son centros. Dibuajar las dos órbitas homoclínicas, y esbozar el diagrama de fases (observar la existencia de una separatriz compuesta).

3. Sea

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$

resolver el sistema en coordenadas polares, fijar $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, sea el plano

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 | \theta = \theta_0,\ r > 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$

y determinar el mapa de Poincaré $P(r_0, z_0)$ donde $P : \Sigma \to \Sigma$. Calcular $DP(r_0, z_0)$ y probar que $DP(1, 0) = e^{2\pi B}$ donde los autovalores de B son -2 y 1.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el anillo $A = \{z \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq |z| \leq 2\}$. Sea f un campo C^1 en un entorno de A, que apunta hacia adentro de A en los bordes. Si cada segmento radial es una sección local, probar que hay una trayectoria periódica en A.

5. Probar que una órbita cerrada de un sistema dinámico C^1 planar, corta una sección local en, a lo sumo, un punto.

6. Sea x un punto recurrente de un sistema dinámico C^1 planar, es decir, $\exists\ t_n \to \infty$ tal que $\varphi(t_n, x) \to x$, cuando $n \to \infty$.

   a) Probar que x es periódico.

   b) Mostrar con un ejemplo que puede haber puntos recurrentes que no sean per´ódicos en dimensión mayor.

7. Sea A una región como la del ejercicio 1. Sea f un campo C^1 en un entorno de A, que apunta hacia adentro de A en los bordes. Supongamos que f no tiene ceros en A.

   a) Probar que hay una órbita cerrada.

   b) Si hay un número finito de órbitas cerradas, mostrar que al menos una de ellas tiene órbitas que se espiralan hacia ella de ambos lados (es decir, es un ciclo límite estable).

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, C^1 y sin ceros. Mostrar que toda órbita es un conjunto cerrado.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, C^1. Probar que si el flujo generado por f preserva áreas, no hay ciclos límites.

10. Considerar $\ddot{x} + \dot{x} + x\,(x^2 - 1) = 0$.

    a) Probar que existe $\beta > 0$, tal que $\forall\ \alpha > 0$ existe $T = T(\alpha)$ que verifica que si $|\xi| < \alpha$ entonces $|\varphi(t, \xi)| < \beta$ para $t > T(\alpha)$.

    b) Encontrar todos los puntos críticos y decidir la dimensión de su variedad estable e inestable.

    c) Mostrar que no existen órbitas periódicas.

    d) Esbozar el diagrama de fases.

11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio . Dada $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, se considera el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$.

   a) Probar que si Ω es simplemente conexo y si $div f \neq 0$ en todo Ω, entonces el sistema no tiene órbitas periódicas.

   b) Probar que si Ω es doblemente conexo (es decir, su complemento tiene dos componentes conexas) y si $div(gf) \neq 0$ en todo Ω, para alguna $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, entonces el sistema tiene a lo sumo una órbita periódica.

12. Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x + (x^2 + 2y^2)x \\ \dot{y} = x - y + (x^2 + 2y^2)y \end{cases}$$

tiene exactamente una órbita periódica.

13. *a*) Probar que si $H \in C^1(X, \mathbb{R})$ es una primera integral de una ecuación que no es constante sobre conjuntos abiertos no vacios, entonces la ecuación no tine ciclos límites. (Una primera integral de una ecuación es una función que es constante sobre cada solución de la ecuación).

   b) Sea U un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $H \in C^2(U, \mathbb{R})$ no es constante sobre conjuntos abiertos no vacios, probar que el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = H_y \qquad \dot{y} = -H_x$$

   no tiene ciclos límites. En particular la ecuación (con $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, $X \subseteq \mathbb{R}$ abierto)

$$\ddot{x} = f(x)$$

   no tiene ciclos límites.