1 Oscilador armónico

Ejercicio 1 Plantear y resolver las ecuaciones de Newton para una masa m sujeta a un resorte horizontal (unidimensional) de constante elástica k. ¿En qué unidades se mide k?

- Hallar la energía $E = E(x, \dot{x})$ y verificar que las curvas de nivel son elipses, y que el único punto de equilibrio es el origen.
- Concluir que todas las trayectorias son periódicas.
- A partir del ítem anterior, concluir que el origen es un punto de equilibrio estable.
- Hallar la frecuencia de oscilación y la amplitud.
- Mostrar que toda solución puede escribirse como $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.
- Calcular la amplitud A y el ángulo de fase ϕ a partir de los datos iniciales.

Ejercicio 2 Una masa m cuelga de un resorte vertical de constante k, plantear las ecuaciones de Newton. Observar que la fuerza neta es equivalente a la de un resorte de idéntica constante pero de diferente posición de equilibrio, observar además que la diferencia entre las posiciones de equilibrio del resorte *vacío* y del resorte *cargado* es directamente proporcional a la masa. Analizar las aplicaciones prácticas de este hecho.

Ejercicio 3 Entre dos planos horizontales separados a una distancia H se encuentran dos resortes unidos a una masa m. Hallar

- La ecuación de movimiento de la masa m.
- La solución de la ecuación si la masa es dejada inicialmente en reposo a una altura d del plano inferior ($d < H$).
- Los puntos extremos del movimiento y la rapidez máxima. ¿Es forzoso hallar la ecuación de movimiento?

2 Oscilador amortiguado

Ejercicio 4 Hallar la solución general del oscilador amortiguado,

$$m\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + kx = 0\,,$$

para los distintos valores de los parámetros; $k, m, \mu,$ son constantes positivas.

- ¿Bajo qué condiciones (sobre los parámetros) las soluciones son oscilatorias?
- En el punto anterior, hallar la frecuencia de oscilación y hacer un gráfico de la frecuencia como función de μ.

- ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar μ para que la frecuencia sea infinita (o sea, para que no haya oscilación)?.
- Verificar que todas las soluciones de la ecuación tienden a cero en el futuro, por tal motivo suelen llamarse *transitorias*.
- En el punto anterior verificar que el decaimiento es exponencial y hallar $r > 0$ tal que $x(t) \sim Ce^{-rt}$ para $t \to +\infty$.

3 Oscilador forzado

La ecuación del oscilador forzado está dada por:

$$m\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + kx = f\,.$$

A partir de la linealidad del problema la solución puede escribirse $x = x_p + h$ donde x_p es una solución particular de la **ecuación** (no del problema) y h es la solución de la ecuación homogénea que permite ajustar los datos iniciales.

Ejercicio 5 A modo de ejemplo considerar el forzante $f(t) = t$.

- Hallar una solución particular y verificar que, en el futuro, el comportamiento de cualquier solución del problema es el de la solución particular.
- Mostrar que el comportamiento no cambia si elegimos otra solución particular. En tal caso, la solución particular se llama *estado estacionario*.

Observar que esto deja de tener sentido si la solución particular tiende a cero en el futuro con el orden (exponencial) de la correspondiente solución homogénea.

Ejercicio 6 Por ejemplo, considerar el forzante $f(t) = e^{-3t}$ para la ecuación homogénea

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0\,.$$

Para el problema de la resonancia debemos tener presente dos cuestiones claves, a saber:

- ¿Porqué considerar forzantes periódicos **sinusoidales**?
- ¿Cómo esperamos que sea el movimiento cuando el forzante es periódico?

La primer pregunta está relacionada con la posibilidad de desarrollar cualquier forzante periódico en series de Fourier (de senos) y superponer los resultados obtenidos en cada caso. La segunda cuestión es más delicada y tiene que ver con el hecho de esperar un comportamiento periódico cuya frecuencia sea la del forzante (una vez que haya desaparecido el término transitorio dado por la solución homogénea). Ahora bien, ¿por qué es razonable esperar ésto? ¡Por la simetría que tiene la ecuación frente a desplazamientos temporales de la longitud del período! En otras palabras, si $x(t)$ es una solución particular (**de la ecuación**) entonces $x(t+T)$ también es solución de la ecuación, en tal caso la diferencia entre ambas es una solución del homogéneo y ya hemos visto que éstas son transitorias, de modo que en el futuro esta diferencia es *nula*. Cabe preguntar

- ¿Por qué este argumento falla para el oscilador libre $f(t) = 0$?

- ¿Por qué **debe** fallar?

Sin ambargo, este argumento puede aplicarse al oscilador armónico si pensamos el caso $\mu = 0$ como límite de amortiguaciones que tienden a cero, $\mu \to 0$, y usamos la dependencia continua en los parámetros.

Ahora sí, consideremos un forzante periódico sinusoidal $f(t) = F_0 \mathrm{sen}(\omega t)$.

Ejercicio 7 Considerar la ecuación del oscilador libre –es decir, $\mu = 0$– y obtener una solución particular de la forma $x_p = A(\omega)\mathrm{sen}(\omega t)$. (Es decir, obtener la función $A(\omega)$.) Verificar, además, la identidad

$$\lim_{\omega \to \sqrt{\frac{k}{m}}} |A(\omega)| = +\infty. \tag{1}$$

Observación 1 *En la identidad (1) la cantidad* $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$ *es la frecuencia del oscilador libre. Este fenómeno se conoce como* resonancia.

Veamos ahora cómo es el fenómeno de resonancia en el caso amortiguado, es decir, cuando $\mu \neq 0$.

Ejercicio 8 Considerar el caso amortiguado y obtener una solución particular de la forma $x_p = A(\omega)\mathrm{sen}(\omega t + \phi(\omega))$. (En este caso se trata de hallar tanto $A(\omega)$ como $\phi(\omega)$.)

- Verificar que $\phi \neq 0$. Este fenómeno se llama *desfasaje*. Concluir, a partir del ejercicio anterior, que sin fricción no hay desfasaje.
- Verificar
$$\lim_{\omega \to \omega_0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$
- Hacer un gráfico de la fase como función de la frecuencia del forzante.
- Hallar la frecuencia $\omega_1 = \omega_1(m, k, \mu)$ para la cual la amplitud A es **máxima** y concluir que $A(\omega)$ está acotada. En tal caso diremos que ω_1 es la *frecuencia de resonancia*.
- Hacer un gráfico de la amplitud como función de la frecuencia del forzante.

4 Pequeñas oscilaciones

Ejercicio 9 Considerar el potencial $V(x) = x + x^{-1}$.

- Hallar el único punto de equilibrio.
- Linealizar la ecuación alrededor del equilibrio, analizar la evolución del error y concluir que el punto de equilibrio es *estable*.
- Hallar la frecuencia de oscilación para una solución cuyo dato inicial es una pequeña perturbación de la posición de equilibrio.

Ejercicio 10 Considerar el sistema mecánico formado por dos masas m_1 y m_2 engarzadas en un aro circular y unidas por dos resortes de cosntantes k_1 y k_2. Hallar las frecuencias y los modos naturales de oscilación en los siguientes casos.

- $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k$.
- $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 \neq k_2$.
- $m_1 \neq m_2$ y $k_1 = k_2 = k$.

Ejercicio 11 Un clásico.

Hallar las frecuencias y los modos normales de oscilación para las pequeñas oscilaciones del péndulo doble en función de los parámetros del problema: las longitudes de los hilos y las masas.

Ejercicio 12 Cuatro masitas $m_1 = m_2 = m$ y $m_3 = m_4 = M$ están engarzadas en un aro circular en forma alternada. Sendos resortes idénticos de constante k las unen. Hallar las frecuencias y los modos normales de vibración.

5 Sistemas con coeficientes periódicos

En lo sucesivo consideraremos el sistema

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{2}$$

$$x(0) = x_0\,, \tag{3}$$

donde $A(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N\times N})$ y verifica $A(t+T) = A(t)$. Asimismo, llamaremos $R := \phi(T, 0)$ donde ϕ es el flujo respectivo.

Ejercicio 13 Demostrar que el problema (2) admite solución periódica $x(t)$ si y sólo si $x(0)$ es un punto fijo de R.

Ejercicio 14 Sea $x_\varepsilon(t)$ la solución del problema perturbado

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{4}$$

$$x(0) = x_1\,, \tag{5}$$

con $\|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon$. Demostrar que para todo δ existe ε tal que para $t > 0$ vale $\|x_\varepsilon(t) - x_0(t)\| \leq \delta$ si y sólo si para todo δ existe ε tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $\|R^n(x_1 - x_0)\| \leq \delta$.

Observación 2 *Si la matriz R satisface los requerimientos del ejercicio anterior, diremos que R es estable.*

Ejercicio 15 Considerar los sistemas

$$(a)\ \begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -x_1\,, \end{cases} \qquad\qquad (b)\ \begin{cases} \dot{x_1} &= x_1 \\ \dot{x_2} &= -x_2\,, \end{cases}$$

y analizar la estabilidad de la respectiva matriz R.

Ejercicio 16 Sea R una matriz cualquiera tal que $\det(R) = 1$. Demostrar que R es estable si $|\mathrm{Tr}(R)| < 2$ y que es inestable si $|\mathrm{Tr}(R)| > 2$.

Ejercicio 17 Considerar el sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \\ \dot{x_2} &= -\omega^2 x_1 \,, \end{cases} .$$

- Obtener la matriz $R(\omega)$.
- Hallar $\mathrm{Tr}(R)$ y obtener los valores de ω para los cuales la matriz es estable.

Ejercicio 18 Considerar ahora el sistema anterior para

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega + \varepsilon & \text{si } t \in [0, \pi) \\ \\ \omega - \varepsilon & \text{si } t \in [\pi, 2\pi) \,, \end{cases}$$

donde $\omega(t + 2\pi) = \omega(t)$.

- Hallar la matriz R. Sugerencia: usar la igualdad $\phi(2\pi, 0) = \phi(2\pi, \pi)\, \phi(\pi, 0)$ y el ejercicio anterior.
- Hallar en forma aproximada, para $\varepsilon \ll 1$, la región de inestabilidad para el primer valor de ω.

Finalizamos esta sección aplicando los resultados obtenidos para mostrar cómo lograr que la posición de equilibrio superior en el péndulo sea estable.

Ejercicio 19 Sea l la longitud del péndulo y supongamos que el punto de suspensión realiza un movimiento oscilatorio cuyo período es 2τ, cuya amplitud es $a \ll l$ y cuya aceleración es constante e igual a $\pm c$ en cada semiperíodo; en tal caso

$$c = \frac{8a}{\tau^2}. \tag{6}$$

La ecuación de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor del punto superior de equilibrio se escribe

$$\ddot{x} = (\omega^2 \pm \alpha^2)x \,,$$

donde el signo cambia en cada semiperíodo, $\omega^2 = \frac{g}{l}$ y $\alpha^2 = \frac{c}{l}$.

- Considerar oscilaciones del punto de suspensión suficientemente rápidas como para que $\alpha^2 > \omega^2$ y hallar la matriz R.
- Introduciendo variables auxiliares $\varepsilon^2 = \frac{a}{l} \ll 1$ y $\delta^2 = \frac{g}{c} \ll 1$ y haciendo aproximaciones adecuadas verificar que R satisface la condición de estabilidad.
- A partir de las aproximaciones obtenidas en el punto anterior y de la identidad (6) estimar la frecuencia necesaria para lograr estabilizar el punto superior de equilibrio en función de los parámetros del problema.