1 Soluciones analíticas

Ejercicio 1 Resolver por series las siguientes ecuaciones en un entorno del origen e indicar el radio de convergencia.

- $u'' + u = 0$.
- $u'' - z\,u = 0$. (Ecuación de Airy.)
- $u'' - z^2\,u = 0$.

2 Soluciones oscilatorias

Ejercicio 2 *Teorema de separación de Sturm*

Sean v_1, v_2 dos soluciones **reales** de la ecuación $u'' + a(s)\,u' + b(s)\,u = 0$ donde a y b son funciones continuas. Demostrar que si v_1 y v_2 son linealmente independientes y si s_1 y s_2 son ceros consecutivos de v_1 entonces existe $s_0 \in (s_1, s_2)$ tal que $v_2(s_0) = 0$. Es decir, los ceros de v_1 y v_2 son alternados. Sugerencia: mirar el signo de wronskiano.

Ejercicio 3 *Teorema de comparación de Sturm*

Sean v_1 y v_2 dos soluciones **reales** y **no triviales** de

$$u'' + k_1(s)\,u = 0 \tag{0.1}$$

$$u'' + k_2(s)\,u = 0\,, \tag{0.2}$$

donde $k_1(s) \leq k_2(s)$ pero $k_1 \not\equiv k_2$. Demostrar que si s_1 y s_2 son ceros consecutivos de v_1 entonces existe $s_0 \in (s_1, s_2)$ tal que $v_2(s_0) = 0$. Sugerencia: Multiplicar la ecuación (0.1) por v_2 y la ecuación (0.2) por v_1, restar e integrar en el intervalo $[s_1, s_2]$. Finalmente, comparar los signos.

Ejercicio 4 Consideremos la ecuación $u'' + k(s)\,u = 0$ y supongamos que en el intervalo $[a, b]$ tenemos que $k(s) \leq 0$. Demostrar que las soluciones tienen a lo sumo 1 cero en $[a, b]$.

Ejercicio 5 Consideremos la ecuación $u'' + k(s)\,u = 0$ y supongamos que en el intervalo $[a, b]$ existen dos constantes $0 < c \leq K$ tales que $c^2 \leq k(s) \leq K^2$, sea además v una solución no trivial.

- Demostrar que si s_1, s_2 son ceros consecutivos de v en $[a, b]$ entonces
$$\frac{\pi}{K} \leq s_2 - s_1 \leq \frac{\pi}{c}.$$
- Concluir que si $v(a) = v(b) = 0$ y v tiene exactamente $N - 1$ ceros en (a, b) entonces
$$\frac{c\,(b-a)}{\pi} \leq N \leq \frac{K\,(b-a)}{\pi}.$$

Ejercicio 6 Consideremos la ecuación de Airy

$$u'' - x\,u = 0, \qquad x \leq 0\,.$$

- Demostrar que cualquier solución (no trivial) tiene una cantidad infinita de ceros en $(-\infty, 0)$. Es decir, para cada u solución existe $0 \geq \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \to -\infty$ tales que $u(\lambda_j) = 0$.
- Encontrar una expresión asintótica para λ_n.

Observación 0.1 *Los resultados anteriores son válidos en situaciones más generales. (Ver el planteo general del problema de Sturm–Liouville.)*

3 Punto singular regular

Ejercicio 7 Resolver las siguientes ecuaciones en un entorno de z_0. Indicar el radio de convergencia.

- $z\,u'' - (1+z)\,u' + u = 0,\ z_0 = 0.$
- $2z^2\,u'' + 3z\,u' - u = 0,\ z_0 = 0.$
- $2z\,u'' + 5(1+2z)\,u' + 5\,u = 0,\ z_0 = 0.$
- $2z\,(z-1)\,u'' + 3(z-1)\,u' - u = 0,\ z_0 = 0.$
- $2z^2\,u'' + z\,(2z+3)\,u' + (3z-1)\,u = 0,\ z_0 = 0.$
- $2(z-4)\,u'' + (5-z)\,u' - u = 0,\ z_0 = 4.$

Ejercicio 8 Resolver las siguientes ecuaciones en un entorno del origen.

- $z^2\,u'' - z\,(1+z)\,u' + u = 0.$
- $4z^2\,u'' + (1-2z)\,u = 0.$
- $z^2\,u'' + 3z\,u' + (1+4z^2)\,u = 0.$

4 Ecuación de Bessel

En esta sección tomaremos en cuenta la ecuación de Bessel

$$z^2\,u'' + z\,u' + (z^2 - n^2)\,u = 0\,, \qquad n \in \mathbb{C}\,. \tag{0.3}$$

Ejercicio 9 Tomar $n \notin \mathbb{Z}$, aplicar el método de Froboenius y verificar que las dos soluciones obtenidas son acotadas en un entorno del origen.

Ejercicio 10 Consideremos $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $w_n(z)$ la solución acotada (alrededor del origen) que ofrece el método de Froboenius, se define la n-sima función de Bessel de primera especie mediante $J_n(z) = \dfrac{w_n(z)}{n!\,2^n}$.

- Obtener una expresión en serie para $J_n(z)$ e indicar el radio de convergencia.
- Verificar la identidad $\frac{d}{dz}\big(z^n\,J_n(z)\big) = z^n\,J_{n-1}\,, \qquad n \geq 1.$
- Verificar la identidad $\frac{d}{dz}\big(z^{-n}\,J_n(z)\big) = -z^{-n}\,J_{n+1}\,, \qquad n \geq 0.$
- Concluir la identidad $J_{n-1} + J_{n+1} = \dfrac{2\,n}{z}\,J_n$.
- Para todo $n \geq 0$, la función $J_n(z)$ tiene infinitos ceros en $[0, +\infty)$. Sugerencia: poner $w_n(x) = x^{-1/2}\,v_n(x)$ y verificar que v_n satisface una ecuación diferencial del tipo $v_n'' + k(x)\,v_n = 0$ y usar los resultados de la sección anterior.